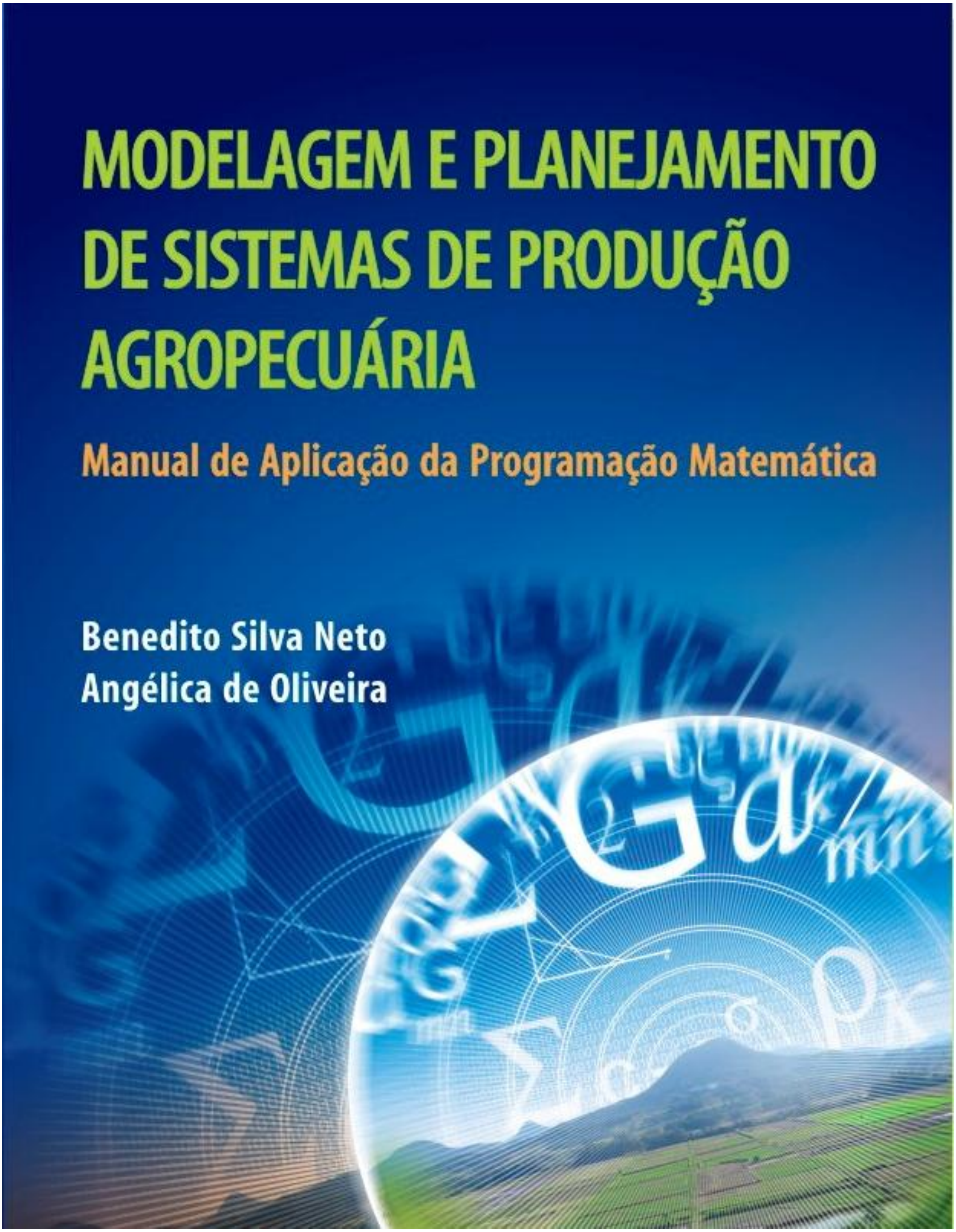

MODELAGEM E PLANEJAMENTO
DE SISTEMAS DE PRODUÇÃO
AGROPECUÁRIA
Manual de Aplicação da Programação Matemática
Benedito Silva Neto
Angélica de Oliveira

ANÁLISE E PLANEJAMENTO DE SISTEMAS DE PRODUÇÃO AGROPECUÁRIA.

Manual de aplicação da programação matemática.

Benedito Silva Neto
Angélica de Oliveira

2009

Sumário

APRESENTAÇÃO

Este texto originou-se da dificuldade de encontrarmos uma bibliografia adequada para o ensino da programação matemática a alunos de Agronomia. A literatura existente concentra-se essencialmente nos aspectos matemáticos da programação matemática abordando de forma superficial os problemas relacionados ao processo da modelagem em si. Provavelmente, esta é uma das razões da grande lacuna existente entre as possibilidades de aplicação da programação matemática para a análise de unidades de produção agropecuárias, reconhecida desde os anos 1950 e que se traduz em um considerável número de trabalhos científicos, e a sua utilização por profissionais das ciências agrárias como uma ferramenta de uso cotidiano.

E foi com esta perspectiva, a de contribuir para que a programação matemática seja uma ferramenta de uso cotidiano para profissionais de ciências agrárias, que este texto foi produzido. Nossa experiência no ensino nos indica que a programação matemática é muito mais facilmente aprendida, pelo menos em um primeiro momento, por meio da observação da sua aplicação. Por esta razão apresentamos um texto bastante sintético, com a maior parte dos tópicos discutidos sendo acompanhada por exercícios com soluções comentadas. Ao longo do texto procurou-se elaborar problemas que reflitam de forma progressivamente mais detalhada a realidade de uma unidade de produção agropecuária. Portanto, aconselhamos vivamente que o leitor analise detalhadamente cada exercício apresentado, resolvendo-os nos programas apropriados, efetuando simulações com a mudança de algum parâmetro, etc.

Uma característica importante deste texto é que nele a discussão dos aspectos matemáticos da programação foi reduzida ao mínimo (se é que, a rigor, pode-se dizer que ela esta presente). Embora saibamos que o conhecimento dos métodos matemáticos utilizados para a solução dos problemas de programação seja de grande valia para o modelador experimentado, cremos que muitos dos pacotes computacionais atualmente disponíveis apresentam soluções absolutamente confiáveis, permitindo que o usuário se concentre especificamente no processo de modelagem. Dentre estes pacotes computacionais podemos incluir o aplicativo "Linear and Integer Optimizer" - LINGO, da LINDO Systems, com o qual trabalhamos já há alguns anos e que é utilizado para a formulação e solução dos problemas apresentados neste texto. Embora o LINGO seja um pacote comercial, a forma que adotamos neste texto para nele formular os problemas pode ser facilmente adaptada a implantação em outros pacotes de programação matemática que possam estar mais acessíveis ao leitor[1]. Além disso, nesse texto trabalhamos também com a modelagem em EXCEL,

[1] Para problemas de programação linear, o software livre lpsolve é uma excelente opção. Este programa pode ser copiado gratuitamente na página http://sourceforge.net/projects/lpsolve/.

por ser este um programa amplamente disponível. No entanto, o leitor logo perceberá que, relativamente à pacotes específicos de programação matemática, o EXCEL apresenta uma série de limitações, o que torna o seu uso restrito para certos tipos de problemas, e ainda assim de dimensões relativamente modestas.

Benedito Silva Neto

Angélica de Oliveira

INTRODUÇÃO: MODELOS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA NA ANÁLISE DE SISTEMAS DE PRODUÇÃO AGROPECUÁRIA

Antes mesmo de iniciar nossa discussão gostaríamos de fazer um alerta ao leitor. Atualmente, a chamada teoria da complexidade[2] tem provocado uma reflexão que se tornou indispensável quando se considera a concepção de modelos matemáticos. Neste sentido, a complexidade da realidade agrícola traz conseqüências fundamentais para a modelagem de sistemas de produção agropecuária, mesmo quando se trata de modelos estáticos e essencialmente lineares como os tratados neste texto. Neste caso, a importância de uma adequada compreensão da complexidade que envolve os sistemas de produção tem conseqüências não apenas na formulação dos modelos, mas, sobretudo, na interpretação dos resultados com eles obtidos. No entanto, uma exposição formal e conceitualmente precisa da teoria da complexidade estaria muito além do caráter introdutório e essencialmente pragmático deste texto. Por esta razão, a discussão realizada nesta introdução sobre modelagem matemática será efetuada recorrendo-se quase que exclusivamente a exemplos e noções intuitivas.

Uma das dificuldades para o desenvolvimento de procedimentos adequados de modelagem de sistemas de produção por meio da programação matemática é o seu caráter estático e normativo, o qual contrasta drasticamente com a natureza dinâmica e evolutiva da agricultura. Além disto, como será visto mais adiante, os modelos de otimização que contém muitas relações não lineares fornecem soluções pouco confiáveis e, não raro, sem qualquer sentido para a análise de sistemas de produção. Ora, a forma como as atividades agropecuárias se desenvolvem e se combinam em uma unidade de produção apresentam muitas relações não lineares, como por exemplo, as relações entre plantas e animais (especialmente quando se trata do uso de pastagens) e o efeito de certas operações agrícolas sobre o rendimento das culturas. Tal tipo de relações deve, portanto ser representado por aproximações, devendo sua expressão na forma não linear ser evitada ao máximo para assegurar a obtenção de soluções satisfatórias.

Estas limitações da programação matemática, aliadas à generalizada resistência ao uso de métodos formais para a análise de sistemas de produção, geram uma certa rejeição à mesma por parte de estudantes, técnicos e até mesmo pesquisadores. Mas, por mais que tal rejeição possa ser considerada infundada, não há como evitar certos questionamentos como: Qual a pertinência da programação matemática na análise de sistemas de produção agropecuária? Qual o significado dos resultados que ela nos fornece? O que é possível aprender com eles?

[2] a qual compreende o estudo de catástrofes, do caos-determinístico e de sistemas dissipativos.

As respostas a questões como estas são, fundamentalmente, bastante simples. O fato é que a solução fornecida pela programação matemática de um modelo de sistema de produção agropecuária não representa um estado ótimo absoluto. Ao contrário, ela deve ser considerada como uma situação de referência indicativa de um certo padrão de comportamento do sistema. Por exemplo, a solução apresentada por um modelo de programação matemática não significa quantos hectares de cada cultura, qual a exata dimensão de um rebanho, quais os rendimentos mais adequados, etc., que devem ser desenvolvidos em uma unidade de produção agropecuária, mas sim fornece quais são as ordens de grandeza destas variáveis, as quais caracterizam um certo padrão de unidade de produção, representando não um estado ótimo qualquer, mas um conjunto de estados possíveis[3]. E a análise de um sistema de produção à luz destes resultados consiste justamente em procurar explicar as relações entre tais ordens de grandeza e as condições representadas pelo modelo, considerando inclusive o grau de agregação dos seus coeficientes. E se um modelo fornece soluções inesperadas, ou mesmo absurdas, é importante analisar se tais soluções devem-se a erros "técnicos" cometidos durante sua formulação (como erros na estimativa de coeficientes ou na definição de restrições importantes) ou se elas são decorrentes de pressupostos errôneos do modelador quanto ao comportamento esperado do sistema de produção. A utilidade maior da programação matemática é a facilidade com que ela pode ser usada para detectar contradições nos pressupostos que são assumidos, muitas vezes inconscientemente, sobre o funcionamento de um sistema de produção. Neste sentido ela pode ser uma poderosa ferramenta de aprendizagem, que se inicia na própria formulação do modelo, na medida em que esta exige que o conhecimento sobre as atividades seja suficientemente claro e organizado, e vai até a análise da solução obtida, a qual pode indicar contradições entre as possibilidades permitidas pelas condições especificadas no modelo e as nossas expectativas.

No entanto, para que os resultados fornecidos por um modelo de programação matemática possam ser interpretados da forma indicada no parágrafo anterior é necessário que a sua formulação tenha sido consistente com este propósito. Ao formularmos um modelo de programação matemática de um sistema de produção agropecuária, é preciso ter em mente que este se constitui em uma representação estática de uma realidade dinâmica e evolutiva. Assim, os coeficientes técnicos e econômicos utilizados no modelo devem representar os fluxos característicos da dinâmica da unidade de produção que pretendemos analisar, e não estados particulares, característicos de um ponto específico da sua trajetória. Isto nos impede, por exemplo, de utilizarmos diretamente dados provenientes de acompanhamentos técnicos, econômicos ou contábeis, relativos a anos específicos, para a estimativa dos coeficientes técnicos, na medida em que a elaboração de um modelo de sistema de produção por meio da programação matemática não pode representar uma situação

[3] isto é, um conjunto que representa um "atrator", conforme a Teoria da Complexidade.

específica da unidade de produção, mas sim uma situação típica, característica de um certo padrão em torno do qual os estados específicos observados a cada ano representam variações. Por exemplo, é pouco provável que possamos observar uma unidade de produção em que as categorias de animais que compõe um rebanho bovino (terneiros, novilhas, vacas em lactação, vacas "secas", etc) apresentem, ao longo do tempo, um número estável de cabeças, ou seja, que ao longo dos anos, por exemplo, o número de vacas em lactação seja o mesmo. Isto resulta em variações consideráveis do resultado econômico proporcionado pela atividade leiteira, pro exemplo, os quais não podem ser imputados estritamente às características técnicas da mesma. O mesmo pode-se afirmar em relação aos rendimentos das culturas e aos preços, que a cada ano apresentam variações conjunturais. Também em relação à infra-estrutura e aos equipamentos, é comum a existência de construções, máquinas e implementos nas unidades de produção que não são estritamente necessários ao seu funcionamento mas que nela ainda se encontram por razões históricas. Este tipo de dado, que é o que diretamente pode ser observado nas unidades de produção, devem ser devidamente transformados em representações de fluxos estáveis para poder serem utilizados na elaboração de coeficientes de programação matemática.

Evidentemente a representação de fluxos[4], referentes a padrões de comportamento, os quais não são diretamente observáveis, ao invés de estados específicos observáveis torna os modelos mais abstratos e mais distantes dos dados originais a partir dos quais são estimados os coeficientes. Porém, neste ponto é oportuno salientar que as condições representadas por um modelo de programação sempre apresentam limitações quanto a sua fidelidade em relação as reais condições da unidade de produção. Isto porque formular um modelo é justamente eleger quais aspectos da realidade são considerados mais relevantes e quais podem ser descartados para a solução de um problema. Assim, as limitações dos modelos matemáticos quanto à sua fidelidade na representação da realidade são inerentes ao processo de modelagem. O que torna um modelo interessante é a sua utilidade em servir para distinguir o que é essencial do que é supérfluo. Portanto, negligenciar este aspecto e exigir que um modelo seja mais representativo simplesmente pela introdução de relações não lineares e desagregação de coeficientes constitui-se em uma estratégia de modelagem de eficiência duvidosa. Nossa experiência, tanto na pesquisa como na extensão, indica que a representatividade de um modelo matemático, seja ela entendida como a sua capacidade em fornecer resultados convergentes como dados observados, seja ela entendida como a amplitude de aspectos da unidade de produção que o modelo considera em sua formulação, não reflete, necessariamente, a sua qualidade. O que reflete a qualidade de um modelo matemático é o aprendizado que ele pode nos proporcionar. Em outras palavras a relevância de um modelo é mais

[4] no sentido explicado no parágrafo anterior, na medida em que na programação matemática não são utilizadas equações diferenciais, que é a forma matematicamente mais precisa de formalizar fluxos.

importante do que a sua representatividade. Neste sentido, modelos pouco representativos, que negligenciam explicitamente certos aspectos do problema para se concentrar nos seus aspectos mais importantes, podem evidenciar soluções de forma muito mais clara e eficiente do que modelos mais representativos[5].

Outro aspecto importante da modelagem de sistemas de produção por meio da programação matemática diz respeito à agregação dos coeficientes. Os valores de um coeficiente são mais estáveis quanto menor for o seu grau de agregação. Por exemplo, um coeficiente que expressa o valor do rendimento físico de uma cultura pode ser obtido a partir de vários outros que expressam, por exemplo, as condições de fertilidade do solo, a insolação incidente sobre as plantas e a umidade do solo (supondo-se evidentemente que as relações entre estes fatores na determinação do rendimento possam ser adequadamente formuladas). Assim, a variabilidade do rendimento de uma cultura é a expressão da variabilidade de cada um dos seus componentes (fertilidade, insolação, umidade, etc.). Assim, a consideração dos componentes do rendimento no lugar de valores médios de rendimento traz muito mais informações sobre as condições em que um determinado resultado econômico pode ser obtido. Porém, em uma unidade de produção, parece haver um limite de agregação dos coeficientes técnicos que descrevem suas atividades, abaixo do qual o que se poderia ganhar em precisão pelo isolamento de relações é menor do que o que se perde pela diminuição da precisão das medidas e, muitas vezes, pela incerteza gerada pela falta de um conhecimento adequado à formalização das relações entre os coeficientes desagregados. Seguindo o exemplo acima, é muito mais fácil medir o rendimento físico de uma cultura do que medir o nível de adubação e os graus de insolação e de umidade responsáveis por tal rendimento, assim como elaborar sub-modelos adequados para formular as relações entre estes coeficientes. Neste sentido, a programação matemática parece pouco propícia para analisar questões específicas à determinadas culturas ou criações, especialmente aquelas relacionadas a composição dos rendimentos físicos, sendo, a nosso ver, melhor adaptada para analisar questões que se colocam ao nível do sistema de produção propriamente dito (combinação de atividades, padrão tecnológico, consideração da incerteza, etc.), as quais podem ser estudadas a partir de coeficientes agregados a níveis relativamente altos, em geral semelhantes aos utilizados para se observar as atividades em condições de campo, por meio de entrevistas junto aos agricultores. Evidentemente que, neste caso, as incertezas geradas pela variabilidade dos coeficientes técnicos não podem ser negligenciadas na interpretação dos resultados[6].

---

[5] Em outras palavras, o que propomos é uma utilização mais "qualitativa" da programação matemática na modelagem de sistemas de produção, em um sentido que se aproxima do proposto por Henri Poincaré para o estudo de sistemas complexos, conforme discutido, por exemplo, por Prigogine (1997).

[6] o que justifica uma interpretação mais “qualitativa” dos resultados obtidos, conforme assinalado acima na nota de rodapé número 2 e no parágrafo relacionado à mesma.

Finalmente, a breve discussão realizada acima nos leva a propor uma estratégia de aplicação da programação matemática à modelagem de sistemas de produção agropecuária concebida dentro de um processo de aprendizado, por meio de formulações progressivas de modelos facilmente manipuláveis, em relação a uma estratégia na qual se privilegiaria a formulação de modelos pretensamente completos.

1. SISTEMAS DE PRODUÇÃO AGROPECUÁRIA

A abordagem sistêmica tem sido freqüentemente utilizada para a análise dos problemas da agricultura. Assim, a noção de sistema de produção vem se generalizando como uma forma de analisar e planejar unidades de produção sem que se perca de vista as limitações de recursos que condicionam as suas atividades, assim como as múltiplas relações que estas mantêm entre si.

O uso de ferramentas matemáticas na abordagem sistêmica de unidades de produção agropecuária permite que se teste a coerência da sua estrutura e do seu funcionamento de forma metódica e rigorosa. Neste sentido destacam-se os métodos de otimização os quais, ao indicar como utilizar os recursos disponíveis da forma economicamente mais vantajosa, atribuem um sentido prospectivo à análise.

Nesta disciplina a análise de sistemas de produção será realizada por meio de métodos de programação linear e não linear. Porém antes de iniciar o estudo destes métodos convém aprofundarmos algumas noções relacionadas à análise de sistemas de produção.

1.1. A unidade de produção agropecuária vista como um sistema

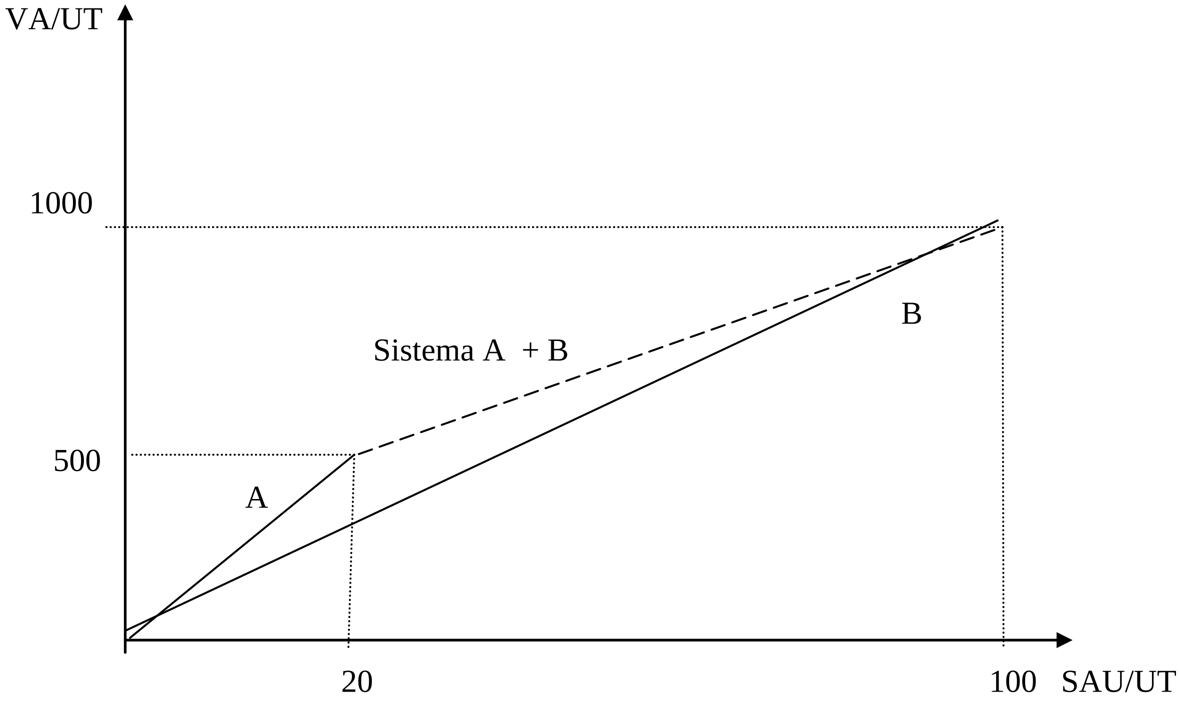
Uma unidade de produção agropecuária pode ser interpretada como um conjunto de recursos mobilizados para a obtenção de um resultado econômico por meio do desenvolvimento de atividades agropecuárias. Tais atividades, além de competir, em menor ou maior grau, por recursos, podem ser complementares ou suplementares entre si. A ênfase na consideração das limitações de recursos e na definição precisa das diversas relações que as atividades de uma unidade de produção mantêm entre si é o que caracteriza a noção de sistema de produção.

Uma das noções relacionadas à aplicação de ferramentas matemáticas na abordagem sistêmica de unidades de produção agropecuária que muitas vezes gera problemas é a noção de "atividade". Como se sabe, de maneira geral a matemática não lida diretamente com "conteúdos", mas apenas com quantidades e símbolos (normalmente usados quando não sabemos, ou não queremos, atribuir uma quantidade definida a uma variável). Por exemplo, de um ponto de vista matemático, a variável "cultura da soja" não tem relação com qualquer espécie de planta, mas sim com um conjunto de "números" (quantidades) que definem o que é uma cultura de soja. Tais quantidades podem ser insumos, horas de equipamentos, instalações, rendimento físico, preço, etc, os quais, quantificados monetariamente determinam um certo resultado econômico, dada uma certa quantidade de recursos disponíveis. Assim é comum que, em uma unidade de produção especializada na cultura da soja, possuir várias atividades "cultura da soja", segundo a época de plantio, variedade, a quantidade de insumos, enfim, tudo o que pode ocasionar um resultado econômico distinto de outras atividades "cultura da soja".

1.2. Modelagem e análise da combinação de atividades em um sistema de produção

A modelagem de combinação de atividades em sistemas de produção pode ser efetuada de várias formas. Uma das formas mais simples é a sua representação em um gráfico em duas dimensões, tomando-se como variável independente o recurso considerado mais limitante e o resultado econômico como variável dependente.

Considerando-se A e B como atividades (culturas ou criações) que devem compor um sistema de produção (supondo que não há necessidade de capital fixo).



VA A = 25*SAU; SAU máxima/UT = 20 ha
VA B = 10*SAU; SAU máxima/UT = 100 ha

Supondo que o agricultor dispõe de uma unidade de trabalho (1 UT), como calcular a quantidade de A (atividade mais intensiva) e B (atividade mais extensiva) que maximiza o resultado econômico?

Em primeiro lugar note que se o agricultor dispuser de uma SAU de até 20 ha, ele deve se dedicar totalmente à atividade A, a qual lhe proporcionaria o maior valor agregado. Pelo mesmo motivo, se ele dispõe de 100 ha ou mais, ele deve se dedicar à atividade B (a qual ele iria praticar sobre 100 ha, que é o máximo que sua mão-de-obra lhe permite, mesmo se ele dispusesse de mais área).

Porém, e se ele dispor de, por exemplo, 30 hectares?

Existem várias formas de solucionar este problema:

- Uma delas, bastante usada no passado, é por aproximações sucessivas, por exemplo:

Tabela 1.: Dados de um sistema de produção.

Área de A	Área de B	Valor Agr./UT	Área total	Sobra de área
20	0	500	20	10
19	5	525	24	6
18	10	550	28	2
17,5	12,5	562,5	30	0

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

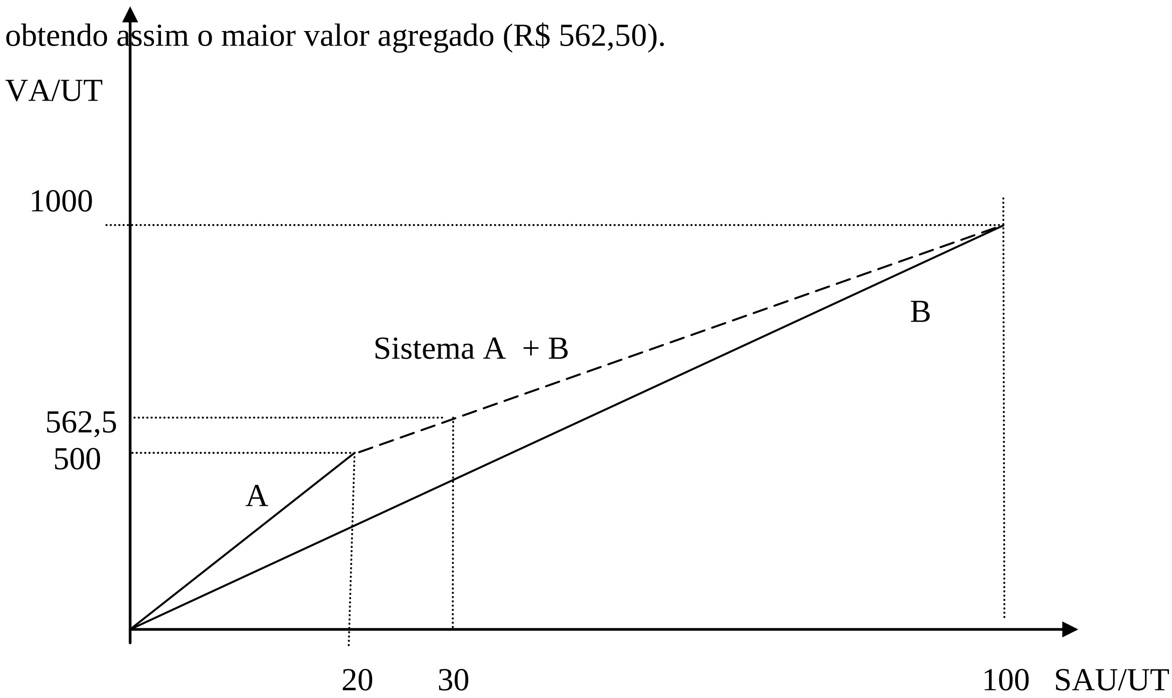
O procedimento adotado foi o seguinte:

1) inicia-se pela atividade intensiva, com sua área máxima;

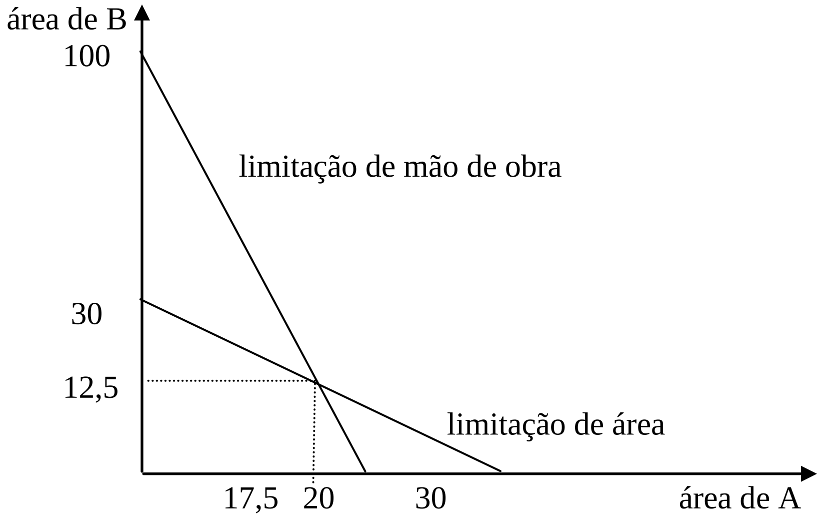
2) se sobrar área, diminui-se uma unidade (ou menos) de área da atividade intensiva. Isto faz com que uma certa quantidade de mão-de-obra seja liberada (no nosso exemplo, a mão-de-obra necessária para fazer 1 hectare de A, pode fazer 5 hectares de B), permitindo fazer uma certa área da atividade extensiva;

3) repete-se o passo 2 até que toda a área seja utilizada.

No nosso exemplo, sobre 30 hectares o agricultor deveria fazer 17,5 ha de A e 12,5 de B, obtendo assim o maior valor agregado (R$ 562,50).



Outra forma de solucionar este problema seria através do seguinte gráfico:



Basicamente, a programação linear (e numa certa medida, também a programação não linear) é uma combinação dos métodos descritos acima (método de aproximações sucessivas e método gráfico).

2. FUNDAMENTOS DA PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Durante a Segunda Grande Guerra, o governo norte-americano (por meio da RAND Corporation) demandou a um conjunto de pesquisadores que desenvolvessem métodos matemáticos para a solução de problemas de logística militar. Um dos primeiros métodos a ser desenvolvidos foi a programação linear, cuja utilidade para aplicações "civis" logo ficou evidente (ANDRADE, 1990).

Basicamente, a PL consiste em um método para a solução de problemas estáticos e lineares de otimização sob restrições. Em outras palavras, sempre que for possível formular um problema como um conjunto de variáveis cujos valores se deseje maximizar (ou minimizar) relacionadas a um outro conjunto de recursos disponíveis, por meio de expressões matemáticas lineares, pode-se obter a sua solução pela PL.

No caso de uma unidade de produção, por exemplo, pode-se considerar a possibilidade de maximizar a soma de uma medida linear do resultado econômico (margem bruta, por exemplo) de diferentes atividades sujeitas a restrições de área, mão-de-obra e equipamentos.

Enfim, é importante salientar que a PM é um instrumento de análise tipicamente de médio e longo prazo da unidade de produção, devendo ser utilizada mais para o seu planejamento estratégico do que para a sua gestão cotidiana. Isto porque restrições como as de rotação de culturas, e variáveis como a dimensão de um rebanho leiteiro ou as relacionadas à definição de sistemas forrageiros não podem ser adequadamente analisadas pensando-se apenas no curto prazo, como será visto nas próximas seções.

2.1. A PL como base para a aplicação da PM na análise de unidades de produção agropecuária

Muitas das relações entre as atividades presentes em uma unidade de produção agropecuária são não lineares. A otimização do capital fixo, a otimização considerando o risco por meio da minimização da variância dos resultados econômicos, a consideração das relações entre o crescimento de pastagens e o seu consumo pelos animais, a variação da capacidade de ingestão de alimentos por bovinos em função da sua quantidade e qualidade são alguns exemplos bem conhecidos, entre muitos outros, de relações não lineares entre atividades relacionadas à produção agropecuária. Além disto, de uma maneira geral, quanto mais desagregado for um modelo de programação, ou seja, quanto mais detalhadamente forem consideradas as atividades, maior será a necessidade de recorrer a relações não lineares para a sua formulação. A formulação de modelos de unidades de produção por meio de relações lineares implica, portanto, em uma considerável simplificação da sua realidade.

Por outro lado, a ausência de preocupação em limitar a formulação de relações não lineares na representação de unidades de produção por meio da programação matemática leva rapidamente à obtenção de modelos computacionalmente insolúveis ou com soluções extremamente instáveis. Neste sentido, a aplicação da programação não linear na modelagem de unidades de produção agropecuária deve ser restrita à inclusão de um número limitado de relações não lineares em modelos que devem ser, essencialmente, de programação linear.

Por este motivo a breve discussão dos fundamentos e, mais adiante, da aplicação da programação matemática aqui efetuada é baseada na programação linear. A programação não linear será discutida mais adiante (item 4) na análise de certas características das unidades de produção agropecuária, para cuja modelagem ela apresenta vantagens evidentes.

2.2. Formulação básica de um problema de PL

Um problema de PL de forma genérica pode ser formulado da seguinte maneira (PUCCINI & PIZZOLATO, 1987):

Maximizar a "função objetivo" $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ ou Maximizar cx

Sujeito às restrições ... Sujeito à

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{n1}x_n \leq b1 \\ &a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{n2}x_n \leq b_2 \\ &... \\ &a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + ... + a_{nm}x_n \leq b_m \end{aligned}$$

ou $Ax \leq b$

onde

Z = soma do resultado econômico

x = 1 a n atividades

c = resultados econômicos das 1 a n atividades

a = necessidades de recursos das 1 a n atividades

b = 1 a m recursos disponíveis

onde

x = vetor de atividades

c = vetor dos resultados econômicos

A = matriz de coeficientes técnicos

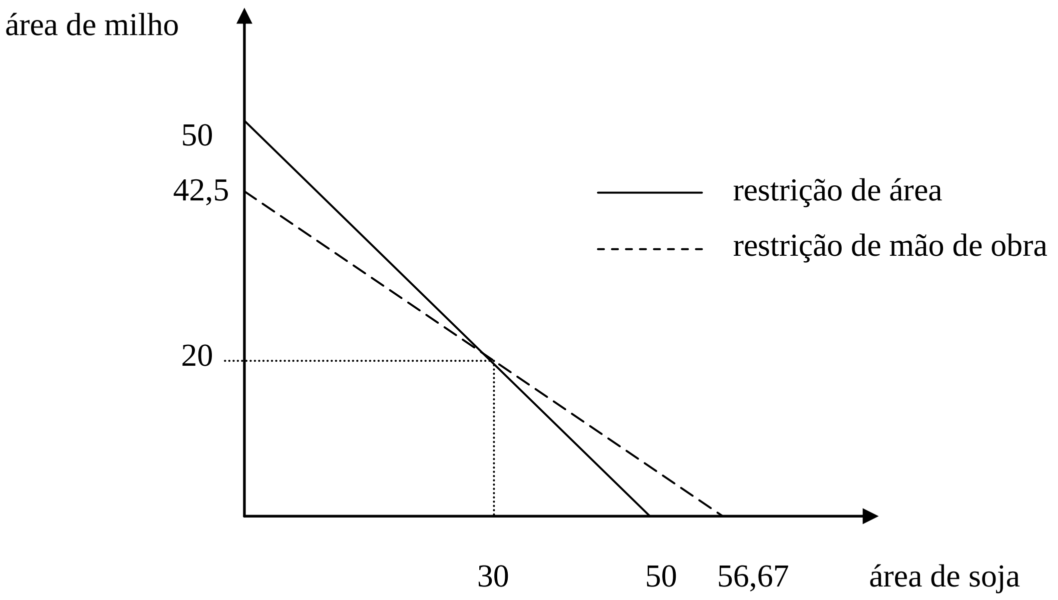
b = vetor de recursos disponíveis

Exemplo:

Um agricultor está planejando plantar soja e/ou milho em sua unidade de produção. A cultura da soja lhe rende uma margem bruta de R$ 320/ha e a do milho R$ 400/ha. Ele dispõe de 50 ha de SAU e de 850 horas de trabalho. Sabendo que a cultura da soja exige 15 horas/ha de trabalho e a do milho 20 horas/ha, formule um problema de PL cuja solução indique o sistema de produção que maximizaria a margem bruta.

2.3. Solução Gráfica de problemas de PL:

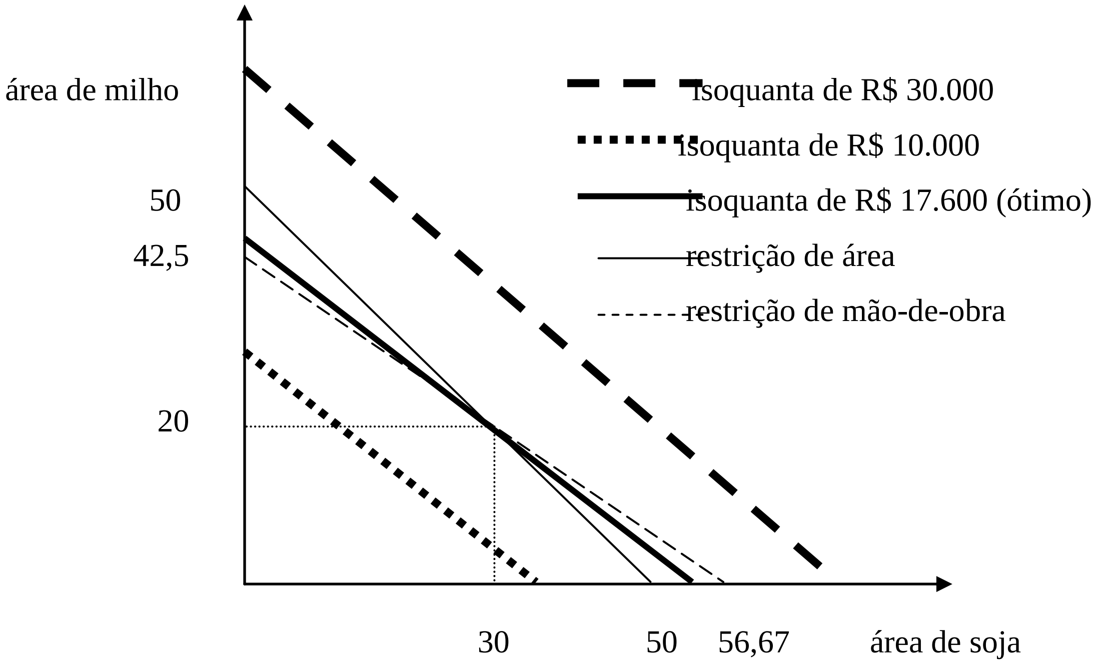
Um problema de PL, com duas atividades e duas restrições pode ser resolvido graficamente (CHIANG, 1982, HOFFMANN e outros, 1978). Utilizando o exemplo acima, temos:



Assim, pelo gráfico pode-se observar que,

- a área máxima de milho que poderia ser cultivada seria de 42,5 ha (se o agricultor decidisse se especializar nesta cultura), pois a disponibilidade de mão-de-obra não permitiria que ele plantasse uma área maior (apesar da área disponível lhe permitir plantar até 50 ha);
- no caso da cultura da soja, a área máxima seria de 50 ha (limitada pela disponibilidade de terra, sendo que pela mão-de-obra até 56,67 ha poderiam ser cultivados com soja);
- todas as combinações que se encontram dentro dos limites do polígono formado pelas restrições mais próximas da origem são possíveis de serem efetuadas com os recursos disponíveis (soluções admissíveis);
- as combinações que utilizam totalmente um ou mais dos recursos disponíveis encontram-se sobre a linha da restrição ativa (mais próxima da origem);
- a combinação ótima corresponde a um dos vértices do polígono formado pelas restrições e os eixos do gráfico.

Outra forma de determinar o ponto ótimo é pela verificação do ponto de tangência entre o polígono das soluções admissíveis e a reta da isoquanta do resultado econômico. Esta reta é definida por combinações que proporcionam a mesma receita. Por exemplo, o resultado econômico de R$ 30.000 poderia ser obtido pelo cultivo de 75 ha de milho ou de 93,75 ha de soja ou por qualquer combinação que esteja ao longo da reta que liga estes dois pontos no gráfico, conforme mostrado abaixo, onde há também outro exemplo, para um resultado de R$ 10.000 (25 ha de milho ou 31,25 ha de soja).

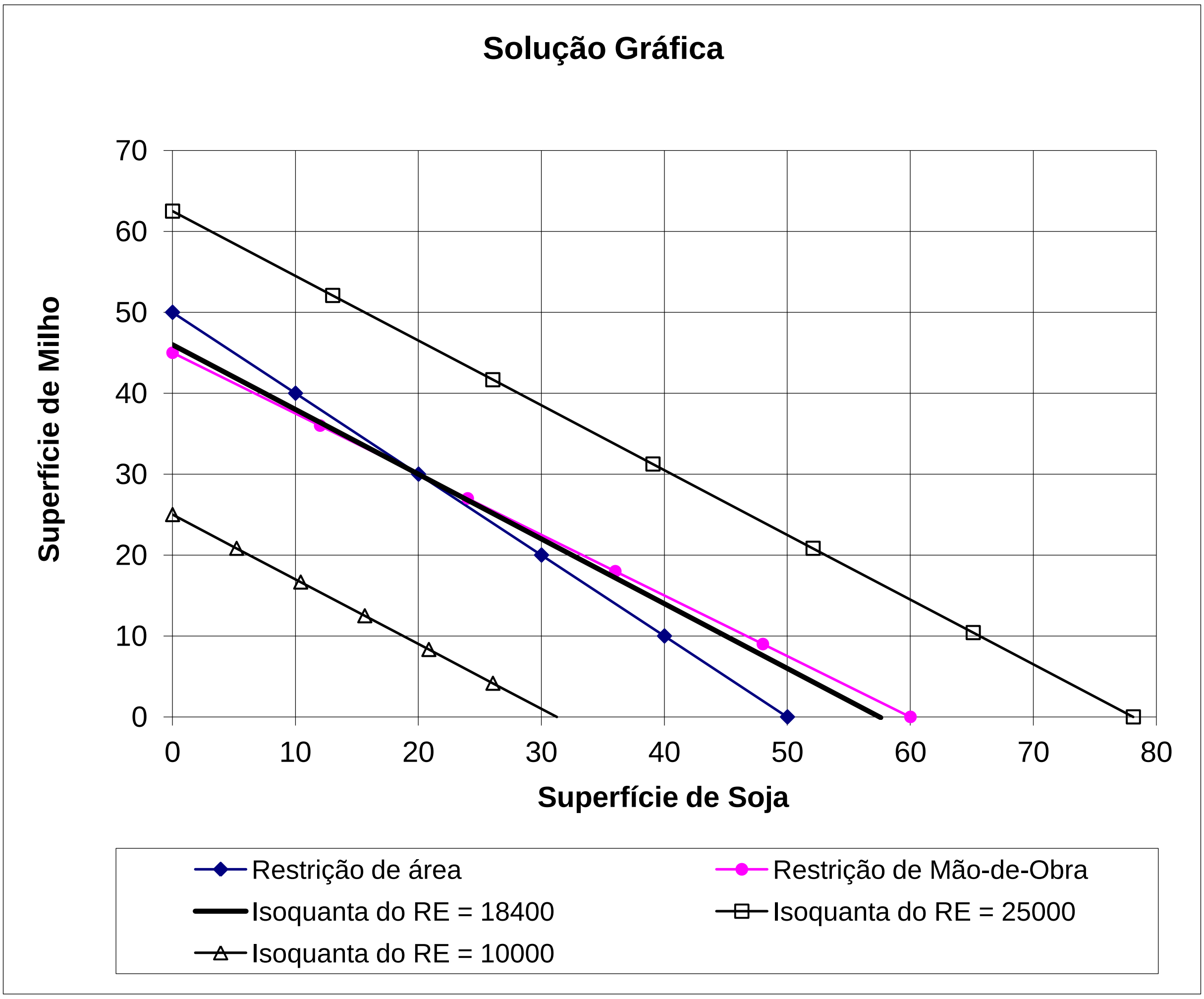


Porém nenhum desses dois resultados econômicos (R$ 30.000 ou R$ 10.000) correspondem ao máximo que pode ser obtido com os recursos disponíveis (ótimo). Pode-se observar no gráfico que o resultado de R$ 30.000 não é possível de ser obtido, pois exige muito mais área e mão-de-obra do que há disponível (está fora do polígono das soluções admissíveis). Já o resultado de R$ 10.000 pode ser obtido, mas deixa recursos sem utilização, sendo evidente, pela observação do gráfico, que resultados maiores são possíveis. Assim, é fácil perceber que o resultado econômico de R$ 17.000 é ótimo na medida em que ele utiliza o máximo possível de recursos, isto é, tangencia o polígono das soluções admissíveis.

2.3.1. Exercício

Um agricultor pode produzir as culturas de soja ou milho em sua unidade de produção. Ele dispõe de 50 ha de terra e 900 horas de trabalho. A cultura da soja demanda 15 horas/ha de trabalho e a cultura do milho 20 horas/ha. Quanto aos resultados econômicos, a cultura da soja proporciona 320 R$/ha de margem bruta e a cultura do milho 400 R$/ha. Quanto o agricultor deve plantar de cada cultura para maximizar a margem bruta? Obtenha a solução gráfica e pelo comando Solver do EXCEL.

Solução:



Pelo gráfico pode-se observar que a área máxima de milho que poderia ser cultivada seria de 45 ha, pois a mão-de-obra é um fator limitante apesar da disponibilidade de área permitir a implantação de uma área maior. No caso da cultura da soja, é possível cultivar uma área máxima de 50 ha (limitada pela disponibilidade de área, sendo que pela mão-de-obra até 60 ha poderiam ser cultivados com soja).

Analisando o gráfico é possível constatar que o resultado econômico de R$ 18.400 é o ótimo, pois ele utiliza o máximo de recursos, ou seja, sua isoquanta tangencia o polígono das soluções admissíveis, formado pelas retas das restrições de área e de mão-de-obra. Isto fica evidente quando observamos no gráfico alguns conjuntos de soluções alternativas. Assim, embora as soluções representadas pela isoquanta do resultado econômico de R$ 10.000, que cruza o eixo das ordenadas no ponto correspondente à 25 ha de milho e o eixo das abscissas no ponto correspondente à área de 31,26 ha de soja, encontrar-se dentro do polígono das soluções admissíveis, ela deixaria muitos recursos (terra e área inutilizados). Por outro lado, as soluções representadas pela isoquanta do resultado econômico de R$ 25.000 estão fora do polígono das soluções admissíveis, pois para obter este resultado seria necessário plantar mais do que a área de 50 ha disponíveis (62,5 ha de milho ou 78,13 ha de soja ou ainda uma combinação destas duas culturas, na qual cerca de 1,25 ha de soja poderiam ser substituídos por 1 ha de milho, ou vice-versa). Assim, nenhum destes dois resultados econômicos (R$10.000 ou R$ 25.000) corresponde ao máximo que pode ser obtido com os recursos disponíveis.

No excel, o total da margem bruta será definido variando a área (ha) da soja e do milho através do comando Solver. Por exemplo, tomando as áreas igual à unidade como valores iniciais obtemos a seguinte tabela:

Tabela 1.: Valores iniciais do problema.

	A	B	C	D	E
4		Soja	Milho	Total	Disponibilidade
5	MB	320	400	=B5+C5	
6	Área (ha)	1	1	=B6+C6	50
7	Trabalho (horas/ha)	=15*C6	=20*C6	=B7+C7	900

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

No comando Solver, maximizando a margem bruta total (célula D5), selecionando como células variáveis as áreas de soja e de milho (células B6 e C6), e definindo as restrições de área (D6<=E6) e trabalho (D7<=E7), obtemos os seguintes resultados:

Tabela 2.: Resultados obtidos com o comando Solver.

	Soja	Milho	Total	Disponibilidade
MB	6400	12000	18400	
Área (ha)	20	30	50	50
Trabalho (horas/ha)	300	600	900	900

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

2.3.2. Exercício

Um agricultor deseja formular uma ração para um lote de 100 suínos em fase de terminação de forma a minimizar o custo da alimentação. Considerando as exigências diárias de energia, proteína e ingestão dos animais.

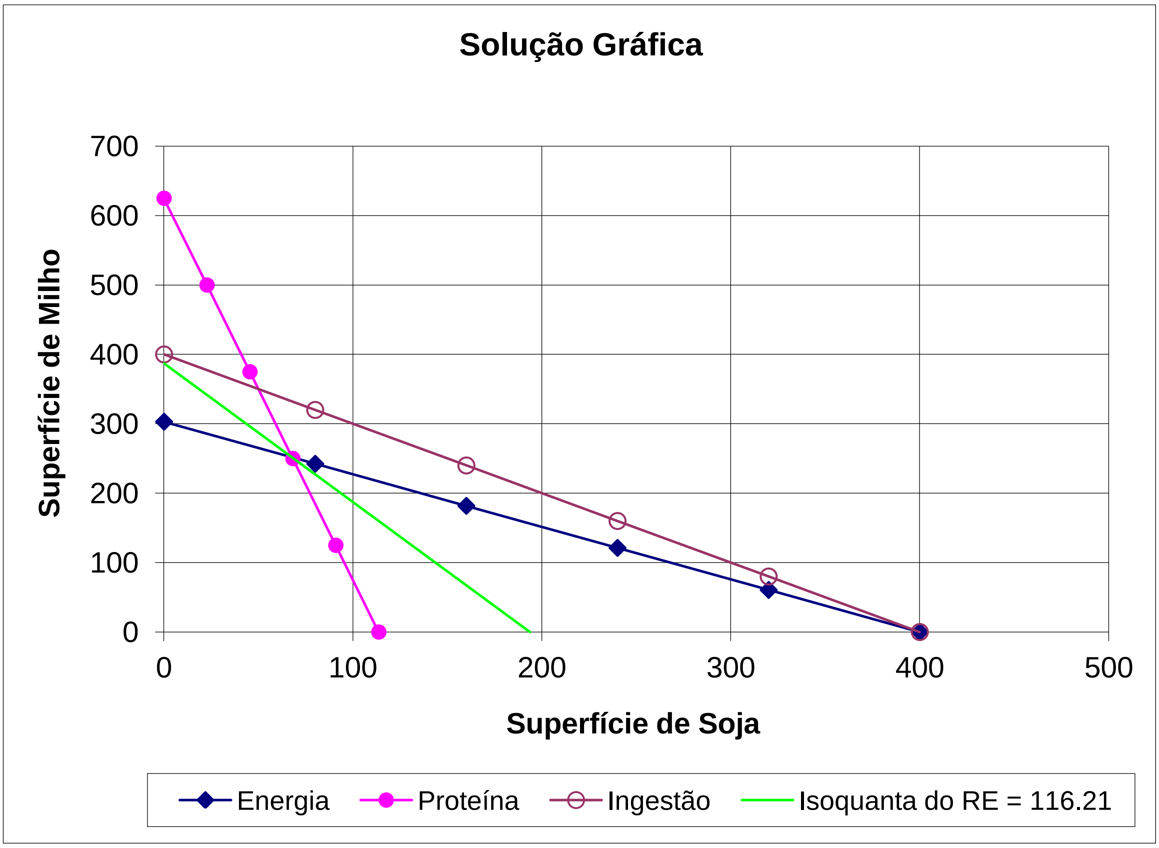
Tabela 3.: Custo por Kg dos alimentos.

	Soja	Milho
Custo/kg	0,6	0,3
Energia/kg	2,5	3,3
Proteína/kg	0,44	0,08

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Qual a ingestão (kg MS) dos animais e conseqüentemente a quantidade de energia e proteína? Obtenha a solução gráfica e pelo comando Solver do EXCEL.

Solução:



Neste caso, o polígono das soluções admissíveis corresponde ao triângulo formado pelas restrições de energia, de proteína e de ingestão. A solução ótima é aquela cuja isoquanta (de R$ 116,21/lote/dia) tangencia este polígono no ponto mais próximo da origem.

No excel, o total do custo será definido variando a ingestão (kg MS) da soja e do milho através do comando Solver. Por exemplo, tomando a ingestão igual a unidade como valores iniciais obtemos a seguinte tabela:

Tabela 4.: Valores iniciais do problema.

	A	B	C	D	E
4		Soja	Milho	Total	Mínimo

5	Custo	0,6	0,3	0,9	
6	Energia	2,5	3,3	5,8	1000
7	Proteína	0,44	0,08	0,52	50
8	Ingestão (kg MS)	1	1	2	400

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

No comando Solver, minimizando o custo total (célula D5), selecionando como células variáveis a ingestão de soja e de milho (células B8 e C8), e definindo as restrições de energia (D6>=E6), de proteína (D7>=E7) e de ingestão (D8<=E8), obtemos os seguintes resultados:

Tabela 5.: Resultados obtidos com o comando Solver.

	Soja	Milho	Total	Mínimo
Custo	40,73482	75,47923	116,2141	
Energia	169,7284	830,2716	1000	1000
Proteína	29,8722	20,1278	50	50
Ingestão (kg MS)	67,89137	251,5974	319,4888	400

% custo	21,25%	78,75%

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

2.4. Interpretação Econômica da PL

A maneira como usualmente os problemas de PL são formulados (resultados econômicos na função objetivo e restrições relativas aos recursos disponíveis) é denominada problema primal. A maioria dos pacotes computacionais de programação matemática, além do nível ótimo das atividades, também fornece na solução o custo marginal de substituição das atividades que não integram a base ótima obtida. Assim, quando uma solução aponta que uma atividade não é interessante economicamente de ser praticada, o programa indica o quanto que a introdução (forçada) de uma unidade desta atividade na solução provocaria de queda no resultado da função objetivo.

De acordo com formulação utilizada por Puccini & Pizzolato (1987), a todo problema de PL, denominado problema primal, a saber,

Maximizar $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

Sujeito às restrições

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{n1}x_n \leq b1$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{n2}x_n \leq b_2$$
$$...$$
$$a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + ... + a_{nm}x_n \leq b_m$$

pode-se obter outro problema, denominado problema dual, ou seja, Minimizar $D = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m$

Sujeito às restrições

$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + ... + a_{1m} y_m \geq c_1$
$a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{2m} y_m \geq c_2$
...
$a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + ... + a_{nm} y_m \geq c_n$

Assim, a transformação de um problema em sua forma primal para a forma dual tem as seguintes características:

a) se a função objetivo do primal é de maximização, a do dual é de minimização;

b) se as restrições do primal são do tipo < as do dual são do tipo >;

c) os coeficientes dos recursos disponíveis (restrições) do primal são os coeficientes da função objetivo do dual;

d) os coeficientes da função objetivo do primal são os coeficientes das restrições do dual;

e) o número de restrições do primal é igual ao número de variáveis do dual;

f) o número de variáveis do primal é igual ao número de restrições do dual.

e) os resultados totais das funções objetivo do dual e do primal têm o mesmo valor.

A solução do problema dual, além de apresentar algumas vantagens computacionais (economia de memória), também possui uma interpretação econômica importante. Assim, enquanto que os valores das variáveis da solução do problema primal correspondem ao nível ótimo das atividades, o valor das variáveis da solução dual fornece a produtividade marginal dos recursos disponíveis. Em outras palavras, a solução do problema dual fornece o quanto aumentaria o resultado da função objetivo se houvesse a disponibilidade de uma unidade a mais do recurso em questão (correspondente a uma restrição do problema primal).

Por exemplo, dado o problema primal

Maximizar RE = 320 soja + 400 milho

Sujeito à

soja + milho ≤ 50

15 soja + 20 milho ≤ 850

A solução do problema primal é

FO = 17600

soja = 30

milho = 20

O problema dual é

Minimizar RE = 50 terra + 850 trabalho

Sujeito à

terra + 15 trabalho >= 320

terra + 20 trabalho >= 400

A solução do problema dual é

FO = 17600

terra = 80

trabalho = 16

Ou seja, para obter o resultado econômico máximo de R$ 17.600, deve-se plantar 30 hectares de soja e 20 de milho. Nestas condições, se houvesse um hectare a mais de terra disponível (51 hectares ao invés de 50), o resultado econômico aumentaria em R$ 80 e, se houvesse uma hora a mais de trabalho disponível (851 hectares ao invés de 850), o resultado econômico aumentaria em R$ 16. Exemplo:

Tabela 6.: Solução ótima.

	Soja	Milho	Girassol	Total	Disponibilidade
MB	9600	8000	0	17600	
Área (ha)	30	20	0	50	50
Trabalho (horas/ha)	450	400	0	850	850

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Tabela 7.: Solução impondo um hectare de girassol

	Soja	Milho	Girassol	Total	Disponibilidade
MB	12800	4000	500	17300	
Área (ha)	40	10	1	50	50
Trabalho (horas/ha)	600	200	50	850	850

Custo marginal de substituição do girassol	300

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

2.4.1. Exercício

A partir dos dados do exercício 2.3.1. formule o problema dual e obtenha sua solução no EXCEL.

Tabela 8.: Solução Dual (EXCEL).

	Área	Trabalho	Total	Disponibilidade
Recursos	4000	14400	18400	
Soja	80	240	320	320
Milho	80	320	400	400

Solução dual (células variáveis)	80	16

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

2.5. Análise de sensibilidade

A maioria dos pacotes computacionais de programação linear possibilita a realização da análise de sensibilidade da solução dos problemas a variações dos valores dos coeficientes. Assim, pode-se observar se à quais coeficientes o problema é mais sensível, ou seja, quais coeficientes cujas variações, que alterariam a base ótima, apresentam os intervalos mais estreitos. Esta análise é muitas vezes bastante útil na fase de formulação de um problema, na medida em que os coeficientes aos quais o problema se mostra muito sensível podem então ser apurados de forma mais precisa. Muitos autores afirmam que problemas de PL que apresentam alta sensibilidade à variação de certos coeficientes são problemas "mal formulados", devido à incerteza que isto pode atribuir as soluções. Tal afirmação, no entanto, pode ser errônea. No caso de sistemas de produção agropecuária, a própria natureza do mesmo pode fazer com que sua sensibilidade seja alta em relação a variações do seu contexto. Isto explicaria, por exemplo, porque muitas vezes observamos unidades de produção com combinações de atividades muito diferentes sob condições semelhantes. É interessante observar que problemas com alta sensibilidade a variações dos seus coeficientes podem apresentar uma grande estabilidade quanto ao seu resultado econômico, o qual pode apresentar pouca variação em relação a variações do seu contexto. Esta característica também ajuda a explicar o porquê da grande variabilidade das combinações de atividades das unidades de produção, sob semelhantes condições.

2.6. Parametragens

A análise da influência da alteração da disponibilidade de um recurso externo sobre a solução de um problema de programação, ao longo de um intervalo suficientemente grande para abranger todas as soluções possíveis, é denominada de parametragem ou análise paramétrica da solução em relação ao recurso em questão. Nesta análise é importante observarmos as combinações de atividades que formam as diferentes bases ótimas do problema, especialmente, os pontos de mudança de base, isto é, quais as quantidades do recurso parametrizado em que ocorre uma mudança na combinação das atividades do sistema de produção.

A parametragem permite assim que se analise o comportamento da "matriz produtiva" de uma unidade de produção em condições mais gerais do que as observadas originalmente. Tal análise pode ser interessante, por exemplo, em estudos de cunho regional.

É interessante observar que nas proximidades destes pontos a solução do problema se mostrará "sensível" à variação de vários coeficientes (inclusive, obviamente, ao que define a disponibilidade do recurso parametrizado). Assim, um problema de programação matemática pode se mostrar sensível em certos valores de disponibilidade de recursos e mais "robusto" em outros, o que torna ainda mais obscura a noção que associa a alta sensibilidade de uma solução à "má" formulação de um problema.

Alguns pacotes computacionais disponibilizam a análise paramétrica, indicando os pontos de mudança de base, os resultados econômicos neles obtidos e as atividades que entram e que saem da base ótima nesses pontos. Porém, mesmo pacotes bastante robustos (como o LINDO) podem apresentar problemas, mesmo no tratamento de modelos de dimensões relativamente baixas (algumas centenas de expressões). Nestes casos, a parametragem só pode ser efetuada tentativamente.

2.7. Requisitos para a aplicação da PL

Como seu próprio nome indica, para que possamos formular um problema de PL, este tem que conter exclusivamente relações lineares. Estas relações se traduzem em alguns requisitos (ou limitações) que devem ser respeitados, os quais, didaticamente, são divididos em:

a) Divisibilidade: os valores das variáveis dependentes (ou seja, daquelas cujos valores inicialmente são desconhecidos e compõem a solução do problema) podem ser números fracionários. Em geral, esta limitação não é muito séria, podendo ser adotados valores aproximados quando a adoção de números fracionários for absurda (criar 3,4 vacas, por exemplo).

b) Proporcionalidade: as atividades devem ser linearmente proporcionais à escala de produção. Por exemplo, o resultado econômico de cinco hectares de uma cultura deve ser exatamente cinco vezes maior do que o de um hectare desta cultura. Isto pode parecer óbvio mas, de maneira geral, quando um resultado econômico inclui despesas fixas (não proporcionais à escala) em seu cálculo, esta linearidade não é observada. Assim, medidas de resultado econômico como a renda agrícola e o valor agregado não podem ser utilizados na PL. No lugar destas medidas, pode-se utilizar a margem bruta e o valor agregado bruto, respectivamente, porém, assumindo-se de que a solução do problema não afetará a composição das despesas fixas.

c) Aditividade: as atividades de um modelo de PL devem ser totalmente independentes, isto é, não pode haver interações entre elas que afetem a linearidade das suas relações. Sempre que houver interações entre variáveis, pode-se considerá-las como atividades diferentes. Por exemplo, se uma cultura em rotação com outra apresenta um rendimento físico maior, deve-se modelar esta cultura em duas atividades: na presença e na ausência da outra cultura (outra forma de modelá-la é impor que esta cultura só seja cultivada em rotação com a outra).

2.8. Medidas de resultado econômico na PL

Muitas formas de medir o resultado econômico de uma unidade de produção não são lineares em relação à escala. Tais medidas incluem cálculos relativos ao capital fixo (depreciações de máquinas e equipamentos) ou outros tipos de gastos não proporcionais, os quais, fazem com que o retorno econômico das atividades por unidade de área (ou outro fator de produção como a mão-de-obra) não seja constante. Assim, medidas como a renda, o valor agregado e o lucro não podem ser utilizadas diretamente na função objetivo de problemas de programação linear. No lugar dessas medidas deve-se utilizar aquelas que incluem apenas a parte proporcional a escala no cálculo, tais como a margem bruta e o valor agregado bruto. Isso implica em assumir os gastos não proporcionais e, portanto, a estrutura da unidade de produção correspondente, como dados, ou seja, que tais gastos não serão otimizados. De uma maneira geral, não há a necessidade de se utilizar medidas de resultado pré-estabelecidas (margem bruta, valor agregado bruto), podendo-se calcular apenas a margem de contribuição relativa as atividades que serão otimizadas, desde que tal margem seja linear em relação à escala (constante em relação à área, por exemplo).

Outro aspecto importante no cálculo do resultado econômico em problemas de PL diz respeito aos preços. Dado que a estruturação de um sistema de produção pode levar vários anos, em geral, a PL é mais útil para a análise de unidades de produção no médio e longo prazo. Por isso os preços considerados no cálculo dos resultados econômicos de um problema de PL devem refletir as tendências de médio ou longo prazo e não apenas o estado da oferta e da procura do momento. Além disso, os preços devem também ser considerados levando-se em conta o próprio processo de decisão do agricultor. Assim, na formulação de problemas de programação deve-se definir os preços "normais" dos produtos e insumos, ou seja, aqueles preços que, sendo considerados como valores tendenciais de médio e longo prazo, o agricultor se baseia para tomar suas decisões sobre os tipos e as doses de insumos a serem aplicados nas atividades. Enfim, é importante salientar que embora o preço normal seja uma medida de tendência central, ele não necessariamente (e talvez raramente) corresponde a uma medida estatística deste tipo (média, mediana e moda).

2.9. Fundamentos da formulação de modelos no programa LINGO

O programa LINGO é um sofware específico para a formulação de modelos de programação matemática. Tendo sido desenvolvido pela LINDO Systems, uma cópia de demonstração pode ser obtida na página desta empresa na Internet.

O programa LINGO que funciona no sistema operacional Windows utiliza em seu "menu" muitos dos comandos comuns aos programas mais utilizados com este sistema (File, Edit, Window e Help). Os sub-comandos específicos ao programa encontram-se no comando "LINGO". Destes sub-comandos, os mais importantes são:

Solution   utilizado para a obtenção da solução, após o término da formulação do problema;

Range   utilizado para a realização da análise de sensibilidade da solução obtida.

Para a formulação dos problemas, o LINGO aceita a linguagem "natural", isto é, com a digitação das expressões matemáticas praticamente da mesma forma como elas seriam digitadas em um processador de texto como o Word. A principal diferença é um "sistema de pontuação" específico que representa os comandos utilizados para o programa identificar operadores matemáticos, textos, funções e inequações (ou equações). Dentre estes comandos, os utilizados nos problemas que serão formulados neste livro são:

! início de texto (neutraliza os comandos até um ";")

; final de uma expressão (função ou restrição)

MAX = início de uma função objetivo a ser maximizada (o sinal de igualdade "=" faz parte do comando)

MIN = início de uma função objetivo a ser minimizada

[nome] define que a expressão que vem a seguir é uma restrição denominada "nome"

+ operador de adição

- operador de subtração

* operador de multiplicação

/ operador de divisão

^ operador de potência

= igualdade

< > desigualdade (que pode ser associada à uma igualdade)

O programa LINGO possui um grande número de funções pré-definidas, as quais são identificadas pelo comando @. As funções mais utilizadas são:

@GIN(x) determina que a variável "x" deve ser um número inteiro;

@BIN(x) determina que a variável "x" deve ser um número binário, 0 ou 1;

@PTD(n,v) retorna a probabilidade de uma observação ter um valor igual ou menor do que "v", segundo a distribuição "t" de Student, com "n" graus de liberdade;

@FREE(x) determina que a variável "x" pode ser um número negativo;

@SMAX(x1, x2, x3) retorna o maior valor da série composta por x1, x2 e x3;

@SMIN(x1, x2, x3) retorna o menor valor da série composta por x1, x2 e x3;

O nome das variáveis, assim como o das restrições, podem possuir qualquer número de letras. Porém, estes nomes não podem conter pontos, vírgulas, espaços e, evidentemente, nenhum símbolo, letra ou palavra correspondente a algum comando ou função.

O programa LINGO apresenta os resultados obtidos na solução do problema em inglês. No entanto, os termos "reduced cost" e "dual price", embora típicos da literatura sobre programação matemática em língua inglesa, são conceitualmente pouco precisos. Assim, a seguir apresenta-se uma tradução "livre" dos termos utilizados pelo LINGO na apresentação dos resultados, procurando-se definir os termos mencionados de forma conceitualmente mais precisa:

Objective value = Valor da função objetivo

Variable = Nome de cada atividade

Value = Nível de cada atividade

Reduced Cost = Custo marginal de substituição de cada atividade.

Slack or Surplus = Sobra ou falta dos recursos em cada restrição externa.

Dual Price = Valor dual dos recursos disponíveis, ou seja, a sua produtividade (maximização) ou custo (minimização) marginal.

O programa LINGO oferece uma série de recursos interessantes para a modelagem de problemas por meio da programação matemática. O leitor interessado deve se reportar ao manual que acompanha o aplicativo (LINGO, 1998) ou ao "Help" presente no menu. Enfim, para o leitor interessado em explorar mais exaustivamente as possibilidades de modelagem oferecidas pelo programa LINGO, recomenda-se o estudo do livro escrito pelo seu criador (SCHRAGE, 1998).

2.10. Exercício

No quadro abaixo estão apresentadas as alternativas, e suas características, que um agricultor dispõe para plantar em uma área de 50 hectares, com uma disponibilidade de mão-de-obra de 208 horas mensais.

Tabela 9.: Atividades e suas características que o agricultor dispõe como alternativas.

	Soja	Milho	Trigo	Colza
MB/ha	320	400	50	40
Necessidade de Trabalho em Outubro (h/ha)		5		
Necessidade de Trabalho em Novembro (h/ha)	5			
Necessidade de Trabalho em Abril (h/ha)	3	5		
Necessidade de Trabalho em Maio (h/ha)			4	5
Necessidade de Trabalho em Setembro (h/ha)			5	9

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Considerando que uma gramínea deve ser sucedida por uma "folha larga" na mesma parcela ao longo do ano, formule um programa linear no programa LINGO.

Formulação e solução do problema (LINGO):

MAX = 320*SOJA + 400*MILHO + 50*TRIGO + 40*COLZA;

[SAUV] SOJA + MILHO <= 50;
[SAUI] TRIGO + COLZA <= 50;
[MDOUT] 5*MILHO <= 208;
[MDNOV] 5*SOJA <= 208;
[MDABR] 3*SOJA + 5*MILHO <= 208;
[MDMAI] 4*TRIGO + 5*COLZA <= 208;
[MDSET] 5*TRIGO + 9*COLZA <= 208;
[ROT1] TRIGO - SOJA <= 0;
[ROT2] MILHO - COLZA <= 0;

```
Objective value:                 18773.33

                       Variable           Value        Reduced Cost
                           SOJA        26.88889            0.0000000
                          MILHO        23.11111            0.0000000
                          TRIGO       0.0000000             16.66667
                          COLZA        23.11111            0.0000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        18773.33             1.000000
                           SAUV       0.0000000             320.0000
                           SAUI        26.88889            0.0000000
                          MDOUT        92.44444            0.0000000
                          MDNOV        73.55556            0.0000000
                          MDABR        11.77778            0.0000000
                          MDMAI        92.44444            0.0000000
                          MDSET       0.0000000             13.33333
                           ROT1        26.88889            0.0000000
                           ROT2       0.0000000             80.00000
```

a) indique qual a área de cada atividade para que o agricultor maximize a margem bruta a ser obtida;

Resposta: Para maximizar a margem bruta o agricultor teria que realizar o cultivo de 26,88 hectares de soja, 23,11 hectares de milho e 23,11 hectares de colza.

b) faça a análise do custo marginal de substituição das atividades e da produtividade marginal dos recursos obtidos na solução do problema, explicando o significado destes resultados em termos de possíveis modificações no sistema de produção;

Resposta: Em relação ao custo marginal de substituição das atividades, é possível afirmar que as culturas de soja, milho e colza estão na base ótima, enquanto que para cada hectare de trigo cultivado haveria uma redução de R$ 16,66 na função objetivo. A produtividade marginal da área de verão é de R$ 320,00 para cada hectare implantado, no mês de setembro o agricultor utiliza toda a mão-de-obra disponível e a produtividade marginal do trabalho neste mês é de R$ 13,33.

c) faça a análise de sensibilidade da solução, indicando a variação de quais recursos afetaria mais a combinação de atividades obtida na solução;

```
 Ranges in which the basis is unchanged:

                                   Objective Coefficient Ranges
                               Current        Allowable        Allowable
               Variable      Coefficient       Increase         Decrease
                   SOJA        320.0000        29.99999         320.0000
                  MILHO        400.0000        INFINITY         29.99999
                  TRIGO        50.00000        16.66666         INFINITY
                  COLZA        40.00000        INFINITY         29.99999

                                        Righthand Side Ranges
                    Row        Current        Allowable        Allowable
                                   RHS         Increase         Decrease
                   SAUV        50.00000        3.925926         26.88889
                   SAUI        50.00000        INFINITY         26.88889
                  MDOUT        208.0000        INFINITY         92.44444
                  MDNOV        208.0000        INFINITY         73.55556
                  MDABR        208.0000        INFINITY         11.77778
                  MDMAI        208.0000        INFINITY         92.44444
                  MDSET        208.0000        53.00000         132.4000
                   ROT1             0.0        INFINITY         26.88889
                   ROT2             0.0        5.888889         14.71111
```

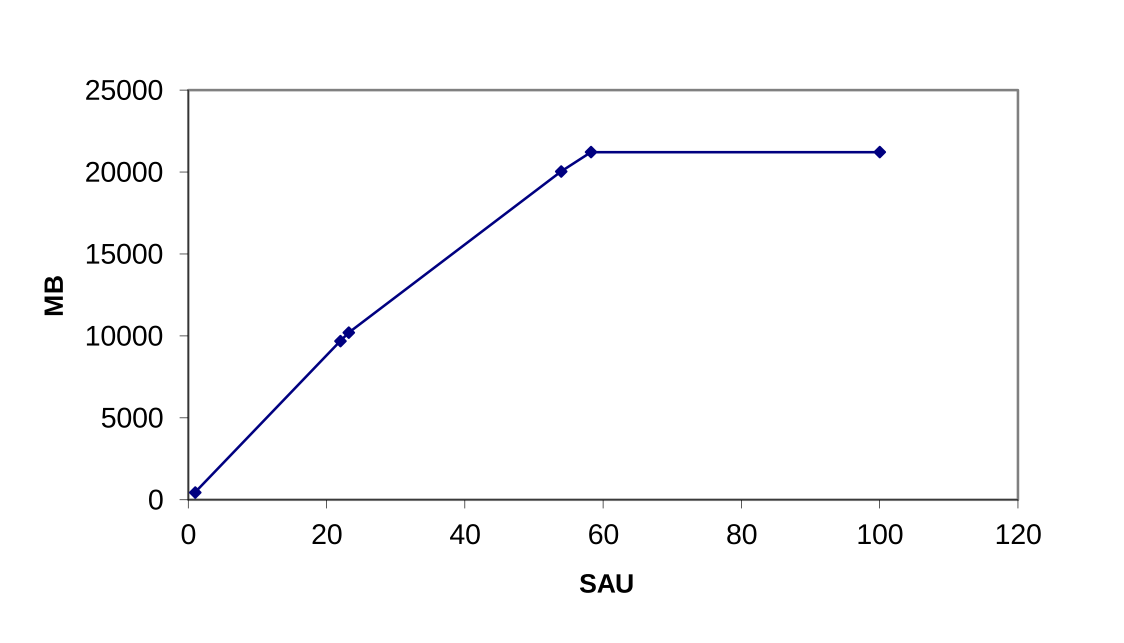
Resposta: As variações no valor do resultado econômico do milho são as que mais afetariam a base ótima obtida. Uma diminuição superior a 7,5% na margem bruta por hectare do milho alteraria a base ótima.

d) faça a parametragem dos resultados variando a disponibilidade de área, indicando as combinações de atividades nos intervalos em que o resultado econômico varia linearmente e os pontos de mudança da base ótima.

Tabela 10.: Parametragem.

SAU	MB	SOJA	MILHO	TRIGO	COLZA
1	440		1		1
23	10120		23		23
23,2	10197,33	0,89	23,11		
54	200050	31	23	0,2	23
58,24	21216	41,6	16,64	11,65	16,64
100	21216	41,6	16,64	11,65	16,64

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.



Resposta: Inicialmente a base ótima é composta pelo milho e pela colza, cujas áreas se mantêm na mesma proporção. A partir de 23 ha aproximadamente, a soja passa a compor a base ótima, sendo que seu nível cresce de acordo com o aumento da disponibilidade de área. A partir de cerca de 54 ha o trigo passa também a integrar a base ótima, crescendo sua participação nesta, juntamente com a soja, até a área total atingir 58,24 ha, a partir da qual as áreas das atividades permanecem inalteradas. Estes resultados podem ser explicados pelo fato do milho ser a atividade que proporciona maior margem bruta, embora seja a que exige mais trabalho. Assim, quando a área é pequena, a mão-de-obra disponível é toda utilizada para a cultura do milho, sendo que a colza cobre a área no inverno devido às exigências da rotação. À medida que a área aumenta, a mão-de-obra torna-se relativamente mais escassa e atividades menos exigentes neste fator de produção passam a integrar a base ótima, de forma crescente. É interessante salientar que, neste caso, o aumento da área levou o sistema de produção à se tornar mais diversificado. Isto porque no mês de abril, em que a soja e o milho competem por mão-de-obra, a exigência da soja por este fator de produção é menor do que no mês de novembro, no qual esta atividade não compete com o milho. As áreas das atividades de inverno, devido a pequena margem bruta que elas proporcionam, são definidas pelas áreas das atividades de verão, por meio das restrições de rotação.

e) considere que o trigo deve ser cultivado sobre, no mínimo, um terço da área em relação à colza e indique a área das atividades e a margem bruta que seria obtida na solução ótima.

[ROT3] COLZA - 3*TRIGO <= 0;

```
Objective value:                18665.00

                     Variable           Value        Reduced Cost
```

```
        SOJA        30.50000            0.0000000
       MILHO        19.50000            0.0000000
       TRIGO        6.500000            0.0000000
       COLZA        19.50000            0.0000000
```

Resposta: A margem bruta que seria obtida na solução ótima é de R$ 18.665,00, sendo que no verão seria cultivado 30,50 hectares de soja e 19,50 hectares de milho, e no inverno 6,50 hectares de trigo e 19,50 hectares de colza.

3. PROGRAMAÇÃO LINEAR E MODELAGEM DE UNIDADES DE PRODUÇÃO AGROPECUÁRIA.

A modelagem de unidades agrícolas dedicadas apenas a produções vegetais, em geral, é bastante simples, sendo muitas vezes possível de ser efetuada no quadro da PL. Por isto, a consideração deste tipo de unidade de produção constitui-se em uma forma bastante didática para a introdução das principais características da modelagem de problemas de PL. Tal tipo de unidade de produção é representado até o grupo de restrições 6.

Já a partir das restrições relativas ao item 7 (e parte do item 8) passamos a considerar também restrições presentes em unidades de produção que incluem a possibilidade do desenvolvimento de produções animais. Tais restrições, muitas delas externas, resultam em uma formulação mais complicada, embora elas não sejam fundamentalmente distintas de restrições internas relativas à produção vegetal.

3.1. A formulação da função objetivo em problemas de PL

Em geral, a formulação da função objetivo em problemas de PL não coloca dificuldades particulares (exceto no caso de problemas de otimização sob risco, como será visto adiante).

Como já discutido acima, na seção 2.8, o único cuidado a ser tomado na formulação da função objetivo em problemas de PL é quanto a linearidade da expressão. Muitas medidas de resultado econômico comumente utilizadas não são lineares. Por exemplo, a utilização da renda ou do valor agregado por unidade de superfície de uma dada cultura varia segundo a sua área total, devido às despesas não proporcionais incluídas no seu cálculo. Tais medidas não devem, portanto, figurar na função objetivo de problemas de PL[7]. Dentre as medidas de resultado econômico cujo valor por unidade de superfície não depende da área total estão a margem bruta e o valor agregado. No entanto, muitas vezes é interessante eleger medidas formuladas "ad hoc" para o problema ("margens de contribuição"). Isto porque o que interessa na solução de um problema de PL não é o resultado econômico obtido em si, mas o quanto ele contribui para o resultado econômico global da unidade de produção (contanto que todas as outras despesas não variem).

3.1.1. Exercício

Formule a função objetivo de um problema de programação linear a partir dos dados mostrados na tabela 1.

Tabela 1.: Caracterização econômica das atividades.

[7] A formulação de funções objetivo que fornecem a renda ou o valor agregado da unidade de produção pode ser feita no quadro da Programação com números inteiros.

<table>
<tr><th>Atividade</th><th>Produto Bruto (R$/ha)</th><th>Consumo Intermediário (R$/ha)</th><th>Salário (trabalho temporário) (R$/ha)</th><th>Funrural (R$/ha)</th><th>Depreciações (R$)</th><th>Salário(trabalho permanente) (R$)</th></tr>
<tr><td>Soja</td><td>1200</td><td>700</td><td>50</td><td>60</td><td rowspan="3">2000</td><td rowspan="3">1500</td></tr>
<tr><td>Milho</td><td>1800</td><td>900</td><td>70</td><td>90</td></tr>
<tr><td>Feijão</td><td>2500</td><td>1000</td><td>150</td><td>125</td></tr>
</table>

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Formulação da função objetivo:

MAX = 390*S + 740*MI + 1225*FE

As depreciações e o salário do trabalho permanente não estão incluídas na função objetivo por não serem linearmente proporcionais ao nível das atividades, ou seja, são gastos fixos.

3.2. Formulação de Restrições

Basicamente, existem dois tipos de restrições em problemas de programação matemática. As restrições externas correspondem às limitações físicas impostas à dimensão do sistema pela disponibilidade de recursos externos. Em uma unidade de produção tais recursos correspondem, em geral, à superfície de terra, à mão-de-obra, às máquinas, equipamentos e instalações e ao capital circulante. Estes recursos são considerados externos porque sua quantidade é fixa, isto é, ela não pode ser alterada ao longo do ciclo de produção representado pelo modelo. As inequações que representam as restrições externas sempre possuem, no seu lado direito, um número que expressa a quantidade disponível do recurso (ou uma "variável", cujo valor é fixo). Em geral, todos os coeficientes das variáveis deste tipo de restrição são positivos (ou do mesmo sinal).

As restrições internas correspondem a recursos que são gerados no interior da unidade de produção ou podem ser adquiridos no seu exterior. Quanto aos recursos gerados, estes dependem fundamentalmente das técnicas disponíveis, expressas nos coeficientes das variáveis correspondentes as necessidades e as disponibilidades do recurso. Por exemplo, a satisfação das restrições de alimentação de bovinos criados a pasto depende da eficiência com que as forrageiras e os concentrados são produzidos na unidade de produção. Em relação aos recursos que podem ser adquiridos fora da unidade de produção, a quantidade utilizada vai depender do preço ao qual o recurso é disponibilizado e da produtividade marginal que este recurso apresenta na unidade de produção, na solução do problema. Por exemplo, o arrendamento de terra depende do seu preço e da produtividade marginal que a terra apresenta na solução do problema. Caso esta última for inferior ao preço do arrendamento, a solução não incluirá o arrendamento, caso contrário, a solução incluirá o arrendamento de uma quantidade de terra até o ponto em que o preço do arrendamento e a produtividade marginal da terra sejam iguais. As restrições internas sempre implicam na inclusão de variáveis com coeficientes negativos na função objetivo. Estas variáveis representam o custo unitário dos recursos que podem ser gerados na unidade de produção ou o preço dos recursos que podem ser adquiridos fora dela. Nas inequações que representam restrições internas sempre figuram variáveis com coeficientes positivos e negativos, figurando o zero no lado direito da desigualdade. Enfim, o valor dual de uma restrição interna em geral não pode ser interpretado, de forma precisa, como uma produtividade marginal na medida em que este tipo de restrição não está diretamente relacionado a um recurso externo. Da mesma forma, os resultados da análise de sensibilidade em relação ao coeficiente (de valor zero) do lado direito de inequações relativas à restrições internas não possuem uma interpretação precisa.

Em uma restrição pode figurar a possibilidade de compra de um recurso, assim como, no seu lado direito, este mesmo recurso estar representado por uma quantidade fixa (diferente de zero). Neste caso temos uma restrição mista. O recurso em questão será então representado por duas variáveis (ou, mais precisamente, por uma quantidade fixa e uma variável), uma representando a quantidade imediatamente disponível e a outra representando o recurso adquirido.

É importante salientar que não existem regras fixas para definir quais recursos são externos e quais são internos em uma unidade de produção. De acordo com os objetivos da modelagem, recursos externos em um problema podem ser internos em outros (e vice-versa). Por exemplo, em um problema o uso da terra, da mão-de-obra ou do capital circulante pode ser modelado em restrições externas, enquanto que em outros pode ser interessante considerar a possibilidade de adquirir estes recursos. No entanto, em todo problema de programação matemática deve haver pelo menos uma restrição externa ou mista, caso contrário sua solução será nula ou infinita. Isto é compreensível na medida em que, se a produtividade marginal dos recursos for mais alta do que os seus preços, a solução indicará a compra de todos eles simultaneamente, resultando em uma solução infinita. No caso em que a produtividade marginal dos recursos for menor do que os seus preços a solução não indicará a compra de nenhum recurso e a solução será nula.

3.2 1. Restrição de superfície

Uma das características mais importantes da produção agropecuária é a sua dependência em relação ao solo. No caso das produções vegetais esta dependência é direta, na medida em que a terra o substrato para o crescimento das plantas, cujas características químicas, físicas e biológicas devem ser objeto de práticas específicas, visando manter ou aumentar o seu potencial de produção. No caso de produções animais, como estas dependem de produções vegetais, sua dependência em relação ao solo também é importante, embora, em alguns casos, quando todos os alimentos são comprados (produção de aves, por exemplo), esta dependência pode não estar expressa no modelo.

Assim, salvo casos muito específicos, todos os modelos de unidades de produção agropecuária possuem restrições quanto à disponibilidade de superfície de solo. Para simplificar, denominaremos estas restrições de restrições de terra.

Em um modelo de programação matemática é importante representar a forma como a terra pode ser usada e quais são os tipos de terra relevantes. Assim, deve-se distinguir as atividades que são concorrentes por uma mesma gleba de terra daquelas que, devido a sua época de crescimento, não concorrem entre si pela mesma superfície. Quando ao tipo de terra, muitas vezes existem glebas que podem ser específicas para certas atividades, como por exemplo, terras baixas para a cultura do arroz (ou para pastagens, etc).

Enfim, é importante salientar que muitas vezes duas atividades podem ser concorrentes por área apenas na época de colheita de uma delas e de plantio da outra. Neste caso, rigorosamente, não há uma restrição quanto à superfície, mas apenas de algum outro recurso relacionado às operações de plantio e colheita como, por exemplo, equipamentos ou mão-de-obra, se algum for limitante. A restrição assim será apenas no período que engloba estas operações.

3.2.2. Restrições de mão-de-obra

Este tipo de restrição está presente em quase todos os modelos de unidades de produção agropecuária. Na medida em que as operações agrícolas exigem o emprego de trabalho humano, a disponibilidade de mão-de-obra muitas vezes se constitui, ao lado da superfície, em uma das principais restrições de recursos em unidades de produção agropecuárias.

Uma dificuldade na modelagem do uso da mão-de-obra em unidades de produção decorre do fato de que em algumas operações o trabalho executado não é linearmente proporcional à escala de produção. Por exemplo, o trabalho requerido para a condução de um rebanho bovino até uma pastagem não é linearmente proporcional ao número de animais. Neste caso, esta operação não pode ser formulada em modelos de programação linear, devendo-se reservar "á priori" uma certa quantidade da mão-de-obra disponível para esta operação.

Um crescente interesse em uma melhor compreensão dos processos de divisão do trabalho em unidades de produção agropecuária tem levado a uma maior atenção na formulação das restrições de trabalho em modelos de programação matemática. Alguns autores chegam mesmo a propor uma programação linear "etnográfica", com o intuito de enfatizar a importância das relações entre os membros da família (inter-geracionais e de gênero) que regem a divisão de trabalho na agricultura familiar. Segundo estas relações, observa-se que determinadas operações agrícolas são tipicamente (e as vezes exclusivamente) executadas por certos membro da família, segundo o seu estatuto no seio desta. Por exemplo, em certas unidades de produção, a colheita mecanizada é tipicamente executada pelo pai ou pelos filhos mais velhos, ficando reservada à mãe, ou as filhas mais velhas, o cuidado com certas culturas de subsistência. Segundo a abordagem da programação linear etnográfica, a negligência destes aspectos da divisão do trabalho pode levar a uma modelagem errônea das restrições de mão-de-obra em unidades de produção agropecuária, especialmente daquelas baseadas no trabalho familiar e que desenvolvem sistemas de produção com tecnologias de baixo uso de insumos e equipamentos de origem industrial.

3.2.3. Restrições de máquinas, equipamentos e instalações

As restrições lineares relativas ao uso de máquinas, equipamentos e instalações são semelhantes as restrições de trabalho. No caso de máquinas e equipamentos, na medida em que as operações agrícolas exigem o seu uso, a sua disponibilidade pode ser um limitante à escala de produção. Muitas vezes o número de horas exigido para efetuar uma operação com um determinado equipamento corresponde ao número de horas de trabalho exigido pela operação. No entanto, o número de horas de trabalho disponíveis nas restrições de máquinas e equipamentos é diferente daquele das restrições de trabalho. Por exemplo, as características de um conjunto (potência de um trator e equipamentos disponíveis) podem permitir que seja semeada uma superfície de soja de no máximo 100 hectares/mês/conjunto, sendo que cada hectare exigiria 4 horas de trabalho nesta operação.

No caso de instalações, em geral, apenas a capacidade máxima é utilizada. Por exemplo, pode-se considerar que um rebanho leiteiro não pode possuir mais do que 50 vacas em lactação devido ser este o máximo de animais que podem ser ordenhados com as instalações disponíveis.

3.2.4. Restrições de rotação de culturas

As propriedades químicas, físicas e biológicas que permitem que um solo mantenha o seu potencial de produção dependem da seqüência de espécies cultivadas sobre o mesmo. Assim, em um modelo de programação linear, rigorosamente, a definição de uma atividade depende não apenas da espécie cultivada, seu itinerário técnico, rendimento, etc, mas também da cultura precedente, a qual pode exercer um efeito considerável sobre o rendimento obtido (especialmente quando este for considerado no médio e longo prazo). No entanto, a consideração das diferentes combinações de culturas para a definição das atividades é algo bastante trabalhoso e enfadonho sendo, portanto, na prática, pouco viável. Para contornar este problema, os modelos de programação matemática de unidades de produção normalmente incluem restrições de rotação, as quais impõe certos limites à especialização do sistema de produção.

Em geral, em uma rotação apenas uma cultura que depende do cultivo precedente de uma outra para manter o seu rendimento, sendo que o inverso não é verdadeiro. Por exemplo, dados experimentais indicam que, na região noroeste do RS, o milho deve ser cultivado pelo menos uma vez a cada dois ou três anos para que o rendimento da soja possa ser mantido. O inverso, porém, parece não ser verdadeiro podendo-se cultivar o milho continuamente sem que isto provoque grandes problemas no seu rendimento (o que, no entanto, é pouco comum na região devido a outros motivos).

É interessante observar que, embora matematicamente a formulação de restrições de rotação seja extremamente simples, muitas vezes ela provoca uma certa confusão em modeladores pouco experientes. Por exemplo, considerando que tecnicamente seja recomendável que a cultura da soja seja precedida pelo menos uma vez a cada três anos pela cultura do milho (três anos de soja e um de milho), a restrição de rotação seria formulada como

SOJA <= 3 * MILHO, ou

SOJA - 3*MILHO <= 0

isto é, em média, a área de milho deve ser, pelo menos, três vezes menor que a área de soja.

3.2.5. Restrições de fertilidade do solo

Na medida em que a produção agropecuária significa uma "exportação" de nutrientes retirados do solo, estes precisam ser repostos para que o nível dos rendimentos não diminua. Muitas vezes uma reposição adequada destes nutrientes já está considerada implicitamente no resultado econômico expresso na função objetivo. Porém, em certos casos pode ser interessante considerar alternativas de reposição dos nutrientes ao solo com diferentes custos (tanto monetários como no uso de recursos como mão-de-obra e equipamentos), especialmente quando existem na unidade de produção atividades de produção animal que disponibilizam dejetos que podem ser utilizados como adubo. Neste caso são formuladas restrições de fertilidade do solo.

Tais restrições, internas, implicam no cálculo da necessidade da atividade de cada um dos nutrientes considerados relevantes (normalmente NPK) e da disponibilidade efetiva destes proporcionada por cada uma das alternativas de adubação (tipos de adubo considerados - químicos e orgânicos) após a sua adição ao solo.

3.2.6. Restrições de capital circulante

Na medida em que para implementar suas atividades os agricultores têm que desembolsar uma certa quantia em dinheiro, a disponibilidade de capital circulante, e o custo do seu empréstimo pelos agricultores, são aspectos que podem influenciar a definição de sistemas de produção agropecuária. Assim, atividades que exigem maior quantidade de capital para serem praticadas podem se mostrar menos interessantes, ou mesmo impraticáveis, mesmo quando se o seu resultado econômico for elevado.

A formulação de restrições de capital circulante implica em uma simulação, mesmo que simplificada, do "fluxo de caixa" da unidade de produção, o que pode se mostrar bastante difícil em certos casos.

3.2.7. Restrições de alimentação de animais

Um dos tipos de modelagem da alimentação animal, a definição de rações de custo mínimo para animais de corte (ou aves poedeiras), constitui-se em uma aplicação clássica da programação linear. A maior parte das fábricas de ração, assim como os grandes confinamentos de bovinos de corte, utilizam corriqueiramente a programação linear. Neste tipo de problema, dados os preços dos alimentos, o teor de nutrientes neles presentes e as necessidades da espécie animal consideradas as sua características (fase de crescimento, principalmente), pode-se formular uma ração de custo mínimo que, conseqüentemente, proporcionará o maior retorno ao agricultor, assumindo-se que o animal terá o ganho de peso esperado. A minimização da função objetivo é submetida a restrições expressando que a disponibilidade de cada nutriente considerado relevante, fornecidos pelos diferentes alimentos que podem compor a ração, deve ser superior à necessidade dos animais. Este tipo de problema inclui também restrições expressando que a satisfação da necessidade de nutrientes pelos animais não deve levá-los a ingerir uma quantidade de alimentos acima da sua capacidade de ingestão. Em geral, também são incluídas restrições que asseguram que certas proporções entre as quantidades de certos tipos de alimentos devem ser respeitadas.

No entanto, a formulação de restrições relacionadas à alimentação de bovinos visando a produção de leite, assim como a otimização como um todo deste tipo de produção, apresenta uma série de dificuldades. Por este motivo dedicaremos um item específico para a discussão desse tópico.

3.2.7.1. Exercício

Ajude um agricultor a formular uma ração para um lote de 20 leitões em crescimento (fase entre 10 e 20 Kg) e terminação de forma a minimizar o custo da alimentação.

Tabela 2.: As exigências nutricionais dos animais são:

	Exigência diária/leitão	
Nutriente (unidade)	Fase crescimento	Fase terminação
Energia digestível (Kcal)	4370	6000

Proteína Bruta (g)	225	300
Cálcio (g)	8,1	5
Fósforo (g)	6,3	4
Sal (g)	6,25	4
Lisina (g)	9,8	7
Metionina + Cistina (g)	7,0	5
Ingestão máxima (g)	1250	3000

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Tabela 3.: A composição dos alimentos que o agricultor pode adquirir para formular a ração.

Alimento	Mat. Sêca (%)	Energia dig. (Kcal/g)	Prot. Bruta (%)	Cálcio (%)	Fósforo (%)	Lisina (%)	Metionina (%)	Cistina (%)
Milho	89	3610	8,9	0,02	0,31	0,18	0,09	0,09
Mandioca	88	3300	2,0	0,09	0,25			
Farelo soja	89	3338	45,8	0,32	0,67	2,9	0,6	0,67
Far. Trigo	89	2511	16	0,14	1,17	0,6	0,1	0,3
Alfafa seca	93	1435	17,9	1,33	0,24	0,8	0,2	0,32
Far. arroz	91	2907	13,5	0,06	1,82	0,5	0,29	0,1
Far. peixe	93	2994	66	4,5	2,85	5,4	2,19	1,00
Far. ossos	95		12,1	28,98	13,59			
Far. sangue	91	2475	80	0,28	0,22	6,9	0,9	1,4

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Tabela 4.: Custo por Kg destes alimentos.

Alimento	Custo (R$/Kg)
Milho	0,17
Mandioca	0,16
Farelo soja	0,2
Far. Trigo	0,18
Alfafa seca	0,22
Far. arroz	0,21
Far. peixe	0,6
Far. ossos	0,5
Far. sangue	0,3
Sal	1,0

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Formulação e solução do problema (LINGO):

MIN=CUSTOCR + CUSTOTER;

[CCRESC] 0.17 * MI + 0.16 * MA + 0.2 * FS + 0.18 * FT + 0.22 * AS
 + 0.21 * FA + 0.6 * FP + 0.5 * FO + 0.3 * FSG + 1 * SAL = CUSTOCR;
[CTERM] 0.17 * MIT + 0.16 * MAT + 0.2 * FST + 0.18 * FTT + 0.22 * AST
 + 0.21 * FAT + 0.6 * FPT + 0.5 * FOT + 0.3 * FSGT + 1 * SALT = CUSTOTER;

```
! FASE DE CRESCIMENTO;
[ED] 3610 *  MI + 3300 * MA + 3338* FS + 2511*FT + 1435*AS
 + 2907*FA + 2994*FP + 0*FO + 2475*FSG - 4370*LEITAO >= 0;
[PB] 89*MI + 20*MA + 458*FS + 160*FT + 179*AS + 135*FA
+ 660*FP + 121*FO + 800*FSG - 225*LEITAO >= 0;
[CA] 0.2 * MI + 0.9 * MA + 3.2 * FS + 1.4 * FT + 13.3 * AS + 0.6 * FA
+ 45 * FP + 289.8 * FO + 2.8 * FSG - 8.1 * LEITAO >= 0;
[FF] 3.1 * MI + 2.5 * MA + 6.7 * FS + 11.7 * FT + 2.4 * AS + 18.2 * FA
+ 28.5 * FP + 135.9 * FO + 2.2 * FSG - 6.3 * LEITAO >= 0;
[LS] 1.8 * MI + 0 * MA + 29 * FS + 6 * FT + 8 * AS + 5 * FA + 54 * FP
+ 0 * FO + 69 * FSG - 9.8 * LEITAO >= 0;
[MT] 0.9 * MI + 0 * MA + 6 * FS + 1 * FT + 2 * AS + 2.9 * FA + 21.9 * FP
+ 0 * FO + 9 * FSG = MET;
[CT] 0.9 * MI + 0 * MA + 6.7 * FS + 3 * FT + 3.2 * AS + 1 * FA + 10 * FP
+ 0 * FO + 14 * FSG = CIS;
[MC] MET + CIS - 7 * LEITAO >= 0;
[MS] 890 * MI + 880 * MA + 890 * FS + 890 * FT + 930 * AS + 910 * FA
+ 930 * FP + 950 * FO + 910 * FSG - 1250 * LEITAO <= 0;
[S] 1000 * SAL - 6.25 * LEITAO >= 0;

! FASE DE TERMINACAO;
[EDT] 3610 * MIT + 3300 * MAT + 3338 * FST + 2511 * FTT + 1435 * AST
 + 2907 * FAT + 2994 * FPT + 0 * FOT + 2475 * FSGT - 6000 * LEITAO >= 0;
[PBT] 89 * MIT + 20 * MAT + 458 * FST + 160 * FTT + 179 * AST + 135 * FAT
+ 660 * FPT + 121 * FOT + 800 * FSGT - 300 * LEITAO >= 0;
[CAT] 0.2 * MIT + 0.9 * MAT + 3.2 * FST + 1.4 * FTT + 13.3 * AST + 0.6 * FAT
+ 45 * FPT + 289.8 * FOT + 2.8 * FSGT - 5 * LEITAO >= 0;
[FFT] 3.1 * MIT + 2.5 * MAT + 6.7 * FST + 11.7 * FTT + 2.4 * AST + 18.2 * FAT
+ 28.5 * FPT + 135.9 * FOT + 2.2 * FSGT - 4 * LEITAO >= 0;
[LST] 1.8 * MIT + 0 * MAT + 29 * FST + 6 * FTT + 8 * AST + 5 * FAT + 54 * FPT
+ 0 * FOT + 69 * FSGT - 7 * LEITAO >= 0;
[MTT] 0.9 * MIT + 0 * MAT + 6 * FST + 1 * FTT + 2 * AST + 2.9 * FAT + 21.9 * FPT
+ 0 * FOT + 9 * FSGT = METT;
[CTT] 0.9 * MIT + 0 * MAT + 6.7 * FST + 3 * FTT + 3.2 * AST + 1 * FAT + 10 * FPT
+ 0 * FOT + 14 * FSGT = CIST;
[MCT] METT + CIST - 5 * LEITAO >= 0;
[MST] 890 * MIT + 880 * MAT + 890 * FST + 890 * FTT + 930 * AST + 910 * FAT
+ 930 * FPT + 950 * FOT + 910 * FSGT - 3000 * LEITAO <= 0;
[ST] 1000 * SALT - 4 * LEITAO >= 0;

[LOTE] LEITAO = 20;
```

```
Objective value:                 11.03411


 Model Title: RACAO PARA SUINOS EM CRESCIMENTO E TERMINACAO
```

Variable	Value	Reduced Cost
CUSTOCR	4.840519	0.0000000
CUSTOTER	6.193590	0.0000000
MI	16.13159	0.0000000
MA	0.0000000	0.8968228E-02
FS	8.737255	0.0000000

```
      FT        0.0000000           0.5021354E-01
      AS        0.0000000           0.1143320
      FA        0.0000000           0.6399710E-01
      FP        0.0000000           0.2780341
      FO        0.4513957           0.0000000
      FSG        0.0000000           0.1046811
      SAL        0.1250000           0.0000000
      MIT         25.82648           0.0000000
     MAT        0.0000000           0.9553360E-02
      FST         8.018691           0.0000000
     FTT        0.0000000           0.4977896E-01
      AST        0.0000000           0.1157441
     FAT        0.0000000           0.6600575E-01
      FPT        0.0000000           0.3246622
      FOT        0.2386987           0.0000000
     FSGT        0.0000000           0.1047478
     SALT        0.8000000E-01       0.0000000
   LEITAO         20.00000           0.0000000
      MET         66.94196           0.0000000
      CIS         73.05804           0.0000000
     METT         71.35598           0.0000000
     CIST         76.96906           0.0000000

      Row    Slack or Surplus       Dual Price
        1         11.03411           -1.000000
   CCRESC        0.0000000            1.000000
    CTERM        0.0000000            1.000000
      ED        0.0000000          -0.4529666E-04
      PB         991.9932           0.0000000
      CA        0.0000000          -0.1725328E-02
       FF         43.89221           0.0000000
       LS         86.41725           0.0000000
      MT        0.0000000          -0.3407771E-02
      CT        0.0000000          -0.3407771E-02
      MC        0.0000000          -0.3407771E-02
      MS         2437.901           0.0000000
       S        0.0000000          -0.1000000E-02
     EDT        0.0000000          -0.4452210E-04
     PBT        0.0000000          -0.1004331E-03
     CAT        0.0000000          -0.1683394E-02
      FFT         86.22649           0.0000000
      LST         139.0297           0.0000000
      MTT        0.0000000           0.0000000
      CTT        0.0000000           0.0000000
      MCT         48.32504           0.0000000
      MST         29651.03           0.0000000
      ST        0.0000000          -0.1000000E-02
     LOTE        0.0000000          -0.5517055
```

O custo mínimo da ração obtido na solução ótima é de R$ 11,034. A ração de crescimento otimizada é composta por 16,13 kg de milho, 8,74 kg de farelo de soja, 0,45 kg de farelo de osso e 0,125 kg de sal, enquanto que a ração de terminação é composta por 25,83 kg de milho, 8,02 kg de farelo de soja, 0,24 kg de farelo de osso e 0,08 kg de sal.

Quando o custo marginal de substituição é zero, indica que a variável está na base ótima. Quando este valor for maior que zero, ele indica o quanto o valor da função objetivo (custo da ração) aumentará caso seja imposta à solução a introdução de uma unidade da variável em questão na formulação da ração. Por exemplo: a alfafa seca (AS) apresenta neste caso, um custo marginal de substituição de R$ 0,11, então para cada kg de alfafa seca utilizado na formulação da ração irá aumentar R$ 0,11 no custo total.

Neste problema os valores duais da solução indicam o quanto o custo da ração aumentaria caso houvesse um aumento na necessidade pelo lote de leitões de uma unidade do nutriente expresso na restrição.

3.2.7.2. A otimização da bovinocultura de leite na unidade de produção agropecuária

A bovinocultura de leite é composta por um conjunto de atividades cuja otimização pode ser analisada por meio da programação matemática. A distribuição das áreas de diferentes pastagens, perenes e temporárias, a quantidade de concentrados a ser adquirida fora da unidade de produção, a área destinada a produção de volumosos (silagem e feno) e de concentrados (grãos) de distribuição livre, assim como a sua distribuição ao longo do ano, a dimensão do rebanho, o rendimento de leite por vaca (e portanto o tipo de animal a ser criado), a produção de leite ao longo do ano, entre outras, são atividades cujo nível ótimo normalmente figura na solução de problemas de programação matemática envolvendo a produção de leite.

Uma característica importante destes problemas é que eles tratam da estruturação do sistema de produção a médio ou longo prazo. Isto porque vários anos são necessários para que se possa, atingir uma certa dimensão previamente definida de um rebanho de leite ou um sistema forrageiro. Assim, mesmo que o agricultor compre todas as vacas necessárias ainda ele terá que aguardar algum tempo para que as outras categorias do rebanho (novilhas e vacas secas) atinjam o número planejado. No que diz respeito às forrageiras, vários anos podem ser necessários para que pastagens perenes possam ser plenamente utilizadas.

Portanto, não há sentido em procurar otimizar uma produção de leite com dados que não sejam adequados para o planejamento a médio ou longo prazo. Assim, além de uma criteriosa análise dos preços, procurando definir qual seria o preço "normal" para o leite e dos insumos, também é necessário que se considere um rebanho em equilíbrio reprodutivo para a formulação do problema de PM.

Diz-se que um rebanho encontra-se em equilíbrio reprodutivo quando o número de animais em cada categoria (terneiros, novilhas, vacas em lactação e vacas secas) não varia ao longo dos anos. Isto significa que o número de animais vendidos ou consumidos (principalmente vacas de descarte e terneiros) e o número de animais que morrem a cada ano compensam de forma exata o número de novilhas que, ao dar cria, se transformam em vacas e o número de animais que nascem e são retidos no rebanho (terneiras). Nestas condições, a partir de alguns índices zootécnicos característicos do rebanho (proporção entre vacas em lactação e vacas secas, taxa de mortalidade e idade da primeira cria das vacas) pode-se definir a proporção entre o número de animais de cada categoria em relação às demais.

Ao considerarmos um rebanho em equilíbrio reprodutivo admitimos implicitamente que o número de vacas em lactação é, em termos médios a longo prazo, o mesmo em cada mês do ano, exceto se o intervalo entre partos das vacas for exatamente de dois meses e o período de lactação de dez meses, ou seja, se considerarmos que cada vaca é uma cria por ano, sempre no mesmo mês. Tal intervalo entre partos corresponde a 100% de natalidade e 83% das vacas em lactação em relação ao total, o qual é um índice muito difícil de ser alcançado. Por isto em problemas de PM o número de vacas em lactação por mês pode ser considerado constante, o que facilita consideravelmente a formulação.

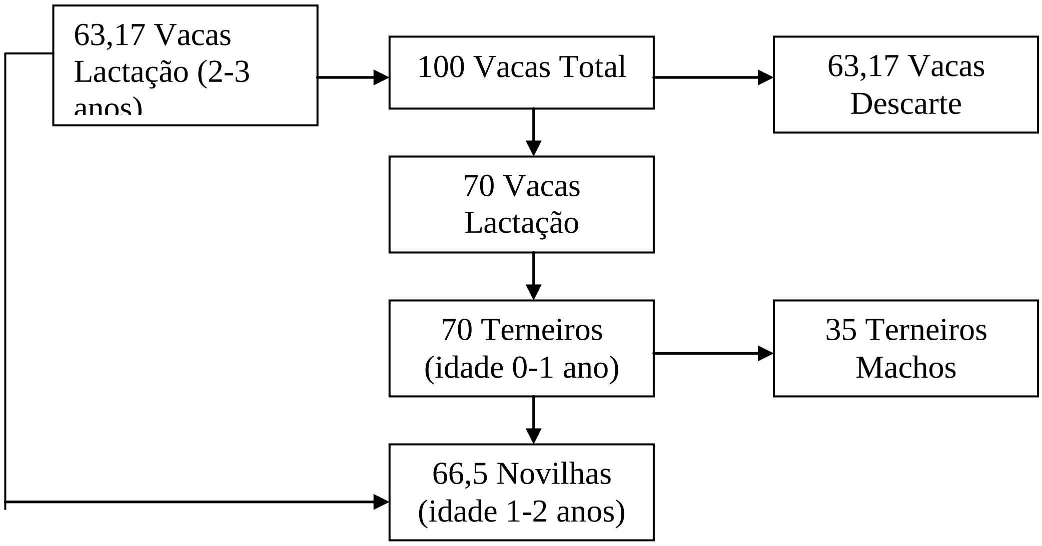
Exemplo da dinâmica de um rebanho bovino em equilíbrio reprodutivo:

Indicadores zootécnicos: Vaca Lactação/Vaca Total = 0,7

Mortalidade anual média = 3%

Idade da primeira cria = 2 anos (final)

Obs.: Venda ou descarte de todos os machos recém-nascidos.



3.2.7.2.1. Determinação do rendimento leiteiro

Por meio da PM pode-se otimizar a produção de leite e o número de vacas em lactação e, portanto, o rendimento obtido por vaca. O procedimento utilizado para relacionar a produção e o número de vacas parte do princípio de que estas têm uma capacidade limitada de ingestão de alimentos e, portanto, de produção de leite, a qual estará diretamente relacionada com o teor energia e nutrientes dos alimentos.

3.2.7.2.2. Restrições de alimentação de bovinos de leite

Para que se possa limitar a produção de leite por vaca, as restrições de alimentação do gado devem ser divididas entre restrições apenas para as vacas e restrições que envolvem as categorias do rebanho que não produzem leite.

Uma das restrições de alimentação do gado de leite compreendem aquelas relacionadas a necessidade e disponibilidade de energia e nutrientes. Muitas vezes apenas as restrições relacionadas à energia são formuladas, devido a energia ser a principal determinante da dieta dos bovinos. Restrições relativas à necessidade e a disponibilidade de proteínas também são comuns, sendo especialmente importantes quando alimentos muito pobres neste nutriente estão disponíveis (como a mandioca, por exemplo).

Outro grupo de restrições relacionado à alimentação de bovinos de leite é formado pelas restrições que limitam a quantidade de matéria seca capaz de ser ingerida. Embora a capacidade de ingestão de matéria seca dos bovinos seja variável, dependendo do tipo, da qualidade e da quantidade de pastagem disponível, assim como da idade do animal e, especialmente, do estágio de lactação em que se encontra cada vaca, em geral utiliza-se um índice geral médio (de 3%) relacionado apenas ao peso vivo dos animais. Este procedimento se justifica pelo fato de se considerar que, devido ao fato do rebanho estar em equilíbrio reprodutivo, há um número constante de vacas em cada estágio da lactação ao longo do ano.

Enfim, como os bovinos são ruminantes, devem também ser incluídas restrições que determinam um mínimo de volumosos a ser ingerido pelos animais. Este mínimo em geral é fixado em 50% da capacidade de ingestão.

3.2.8. Restrições de ligação

A modelagem da alimentação de bovinos de leite implica na formulação de uma série de restrições de ligação. Assim, a produção de leite de cada mês do ano, que pode variar de acordo com o teor de energia e de nutrientes dos alimentos, deve ser ligada a uma variável que expresse o total de leite produzido no ano, a qual determinará a receita total obtida com o leite. O mesmo deve ser feito em relação à silagem e à ração fornecidas mensalmente aos animais (vacas em lactação e animais não produtivos, separadamente). Além disto, um conjunto de restrições deve ser formulado para assegurar que a área equivalente a quantidade total de cada pastagem apreendida pelos animais não seja superior à área total disponível de cada pastagem, em cada mês do ano (vacas em lactação e animais não produtivos, separadamente).

3.2.8.1. Exercício

Um agricultor deseja otimizar seu sistema de produção. Ele dispõe de 50 ha e 416 horas de trabalho familiar por mês. A soja poderia lhe render R$ 400/ha e o trigo, R$50/ha, sendo as necessidades de trabalho de 4 horas/ha em abril e 3 horas/ha em novembro para a soja, e 3 horas/ha em outubro e 2 horas/ha em maio para o trigo. As atividades que podem compor o sistema de alimentação do gado leiteiro, e suas características estão descritas na tabela 5.

Tabela 5.: Rendimento, teor de energia, custo e necessidade de trabalho das atividades que podem compor o sistema de criação.

Atividade	Rendimento (kg MS /ha)	Energia (Mcal/kg MS)	Custo (R$/ha)	Trabalho (horas/mes
Potreiro	2000	1,7	10	1 (outubro)

Capim Elefante	5000	1,8	50	1 (setembro)
Milheto	4000	1,8	250	2 (setembro)
Sorgo	4000	1,8	250	2 (agosto)
Aveia	3000	2	200	2 (abril)
Azevém	3000	2	100	2 (maio)
Silagem	8000	2	600	6 (janeiro) 4 (outubro)
Ração	xxxxxxxxxx	3	0,6	xxxxxxxxxx

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

A ordenha e o fornecimento de alimentos de distribuição livre demanda 10 horas/mês/vaca em lactação. A proporção de vacas em lactação em relação ao total de vacas é de 70% e a taxa de mortalidade é de 3% a.a., sendo que as novilhas têm sua primeira parição no final do seu segundo ano de vida. O preço do leite é R$ 0,4/litro e da carne R$ 1,1/Kg PV. O custo anual por vaca em lactação é de R$ 20/cabeça, por vaca seca R$ 10/cabeça, por terneiro R$ 15/cabeça e por novilha R$ 5/cabeça. O peso das vacas é de 500 Kg PV e a capacidade de ingestão de matéria seca pelos animais é de 3% PV/dia.

Nas tabelas abaixo, estão apresentados os dados do rebanho, rendimento de matéria seca e energia das pastagens ao longo do ano. Os dados referentes a estas informações foram obtidos em NRC (1989).

Tabela 6.: Características do rebanho.

	Cabeças	Peso/cab (kg)	EM/cab/dia (Mcal/dia)	EM/cab/mes (Mcal/mes)
Vacas lactação	1,00	500	14,17	425,16
Vacas secas	0,43	500	17,01	510,19
Nov. 1-2 anos	0,49	337,5	17,07	512,09
Nov. 2-3 anos	0,00	0	0,00	0,00
Nov 3-4 anos	0,00	0	0,00	0,00
Terneiros fêmeas	0,50	112,5	7,76	232,86

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Tabela 7.:Rendimento Kg MS/ha

mes	Potreiro	Capim Elefante	Milheto	Sorgo	Aveia	Azevem
jan	400	1250	1000	1000		
fev	200	750	800	800		
mar	140	500	400	400		
abr	100	500	400	200		
mai	60		200			
jun	40				600	
jul	20				900	600
ago	40				900	900
set	200	250		200	600	1050
out	200	500	200	400		450
nov	300	500	400	400		
dez	300	750	600	600		

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Tabela 8.: Energia ao longo do ano.

mes	Potreiro	Capim Elefante	Milheto	Sorgo	Aveia	Azevem
jan	680	2250	1800	1800		
fev	340	1350	1440	1440		
mar	238	900	720	720		
abr	170	900	720	360		
mai	102		360			
jun	68				1200	
jul	34				1800	1200
ago	68				1800	1800
set	340	450		360	1200	2100
out	340	900	360	720		900
nov	510	900	720	720		
dez	510	1350	1080	1080		
Total	3400	9000	7200	7200	6000	6000

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Solução[8]:

A tabela abaixo apresenta os principais resultados obtidos na solução deste problema.

Tabela 9.: Resultados obtidos na solução do problema.

Variável	**Valor**
Soja	14,71
Trigo	0
Leite	156918,2
Peso Vivo - PV	500
Vacas Descarte – VD	13
Vacas Lactação – VL	32,5
Vacas Secas – VS	13,93
Terneiros – T	16,25
Novilhas – N	15,76
Potreiro – POT	0
Capim Elefante – CEL	20,13
Milheto – MT	0
Sorgo – SO	0
Aveia – AV	0
Azevém – AZ	29,87
Ração – R	0
Milho Silagem – MSIL	15,16

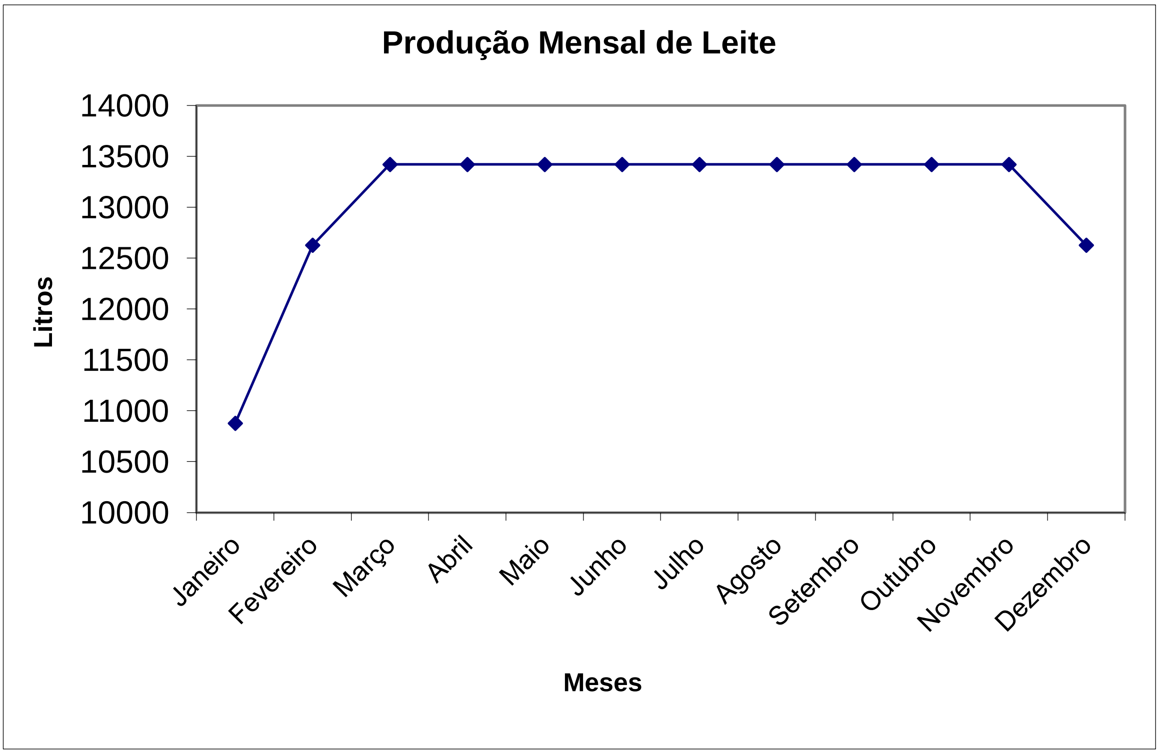
Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

O valor obtido na solução ótima é de R$ 61.599,36, e para obter esta solução otimizando o sistema de produção, como pode ser visualizado na tabela acima, o agricultor teria que realizar o

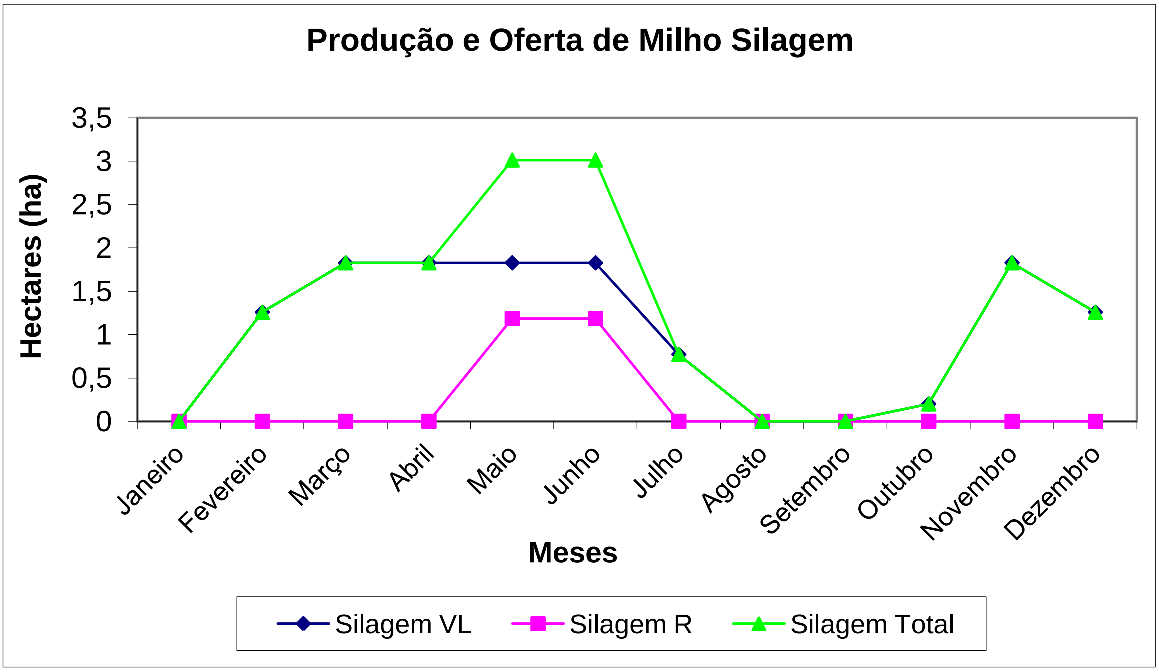
[8] O modelo formulado no programa LINGO encontra-se no anexo 1.

cultivo de 14,71 ha de soja, e para a produção de leite a área agrícola teria que ser utilizada no verão com 20,13 ha de capim elefante e 15,16 ha de milho silagem, e no inverno além do capim elefante, 29,87 ha de azevém.

No gráfico abaixo é mostrada a produção leiteira mensal obtida na solução do modelo. A produção total de leite durante um ano de produção é de 156.918,2 litros, alcançando uma produção média de 13,23 litros por vaca por dia a qual é considerada uma produção intensiva para a região de estudo. A produção apresenta-se estabilizada, com excessão do mês de janeiro no qual o rendimento é um pouco inferior aos demais meses (1,8 litros/vaca em relação ao mês de fevereiro).



O gráfico abaixo apresenta a produção e o consumo de milho silagem pelas vacas em lactação (VL) e pelos animais não produtivos (R) que compõem o restante do rebanho.



Percebe-se que 84% da silagem produzida é ofertada para as vacas em lactação, e que no mês de janeiro não é fornecido milho silagem para os animais porque o capim elefante possui um alto rendimento neste período, o que permite uma redução dos custos de produção. Porém isto implica em um pequeno decréscimo no rendimento por animal (litros de leite / vaca). Esta diminuição do rendimento é o que provoca a queda na produção de leite no mês de janeiro, conforme pode ser observado no gráfico anterior (que descreve a produção mensal de leite).

4. PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR (PNL).

Como discutido no item 2.1. acima, a PL constitui-se na base para a aplicação da PM na modelagem de UPAs. Isto porque problemas com relações não-lineares entre variáveis (multiplicação, divisão e potência) apresentam ótimos locais, sem que, na maioria das vezes, os métodos de solução possam discernir o ótimo global. A presença de um grande número de expressões não-lineares, ou mesmo um número reduzido destas expressões (especialmente nas restrições) com relações altamente não-lineares entre variáveis, pode proporcionar soluções de pouca valia para a análise do sistema de produção. Por exemplo, modelos altamente não-lineares podem indicar soluções que proporcionam resultados econômicos inferiores ao apresentado pela unidade de produção.

Um exemplo simples de modelo de programação que apresenta relações altamente não-lineares é mostrado abaixo.

Maximizar $PY_1 + PY_2$

$x_1 + x_2 <= 12{,}1$

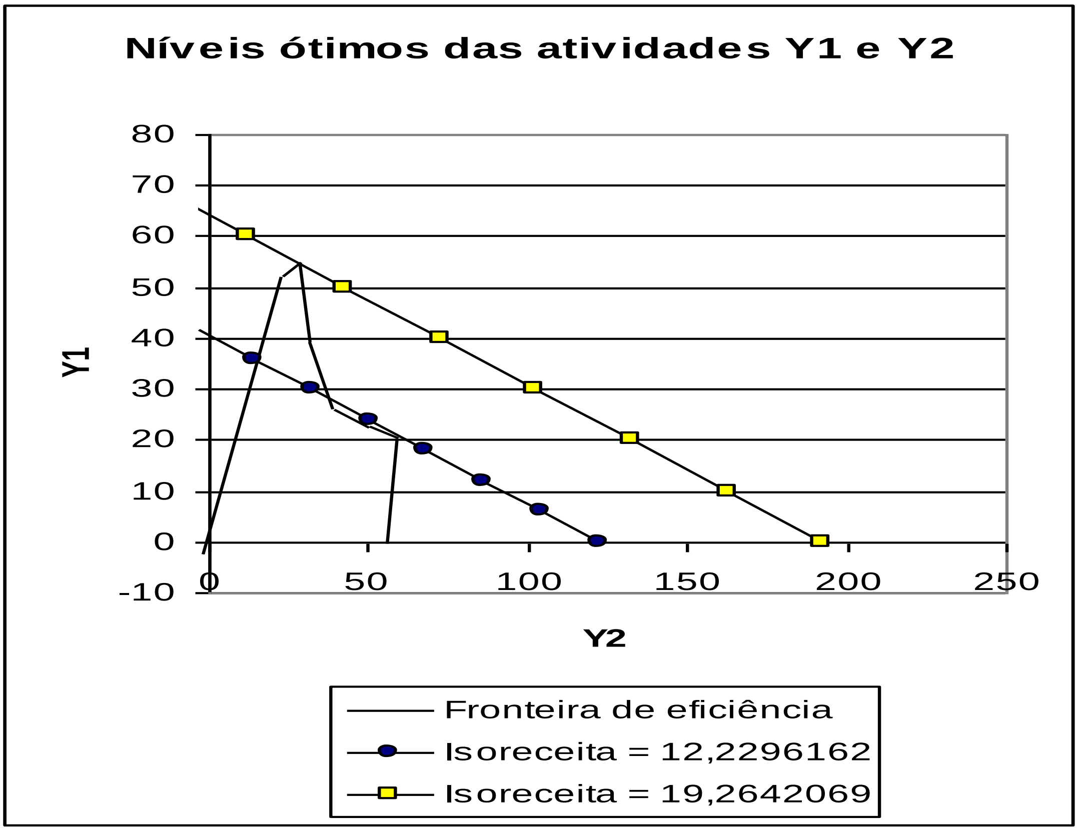
$Y1 = a_1 + b_1x_1 + c_1x_1^2 + d_1x_1^3 + e_1x_1^4$

$Y2 = a_2 + b_2x_2 + c_2x_2^2 + d_2x_2^3 + e_2x_2^4$

onde

	Y_1	Y_2
a =	-0,28866	-2,194154797
b =	23,29274	22,87204364
c =	-8,64233	-6,322212917
d =	1,321306	0,76959309
e =	-0,06342	-0,030623623

Sua solução gráfica é



Como pode ser observado no gráfico, o problema apresenta duas soluções, correspondentes às isoquantas que tangenciam a fronteira de eficiência que delimita a superfície das soluções admissíveis. Os programas EXCEL e LINGO não foram capazes de indicar o ótimo global (isoreceita de 19,26 com Y1 = 57,288 e Y2 = 27,19), quando as iterações partiram de $X_1 = 2$ e $X_2 = 9$.

No entanto, em muitos casos pode ser interessante, e algumas vezes até imprescindível, a formulação de relações não lineares em problemas de PM. A consideração da compra ou não de máquinas ou equipamentos que representam custos não proporcionais, a escolha entre atividades ou sistemas de produção excludentes entre si e a consideração do risco por meio da minimização da variância dos resultados econômicos são algumas aplicações clássicas da PNL na otimização de UPA.

4.1. Programação com números inteiros: modelagem com gastos fixos

A introdução de variáveis que só podem assumir valores inteiros em problemas de PM não implica em métodos matemáticos muito distintos dos utilizados na PL. Na verdade um dos métodos mais utilizados para a solução de problemas de PM com números inteiros, denominado "branch and bound" (literalmente "ramificar e amarrar") consiste em encontrar a solução obtida considerando-se o problema como se ele fosse de PL e depois ajustá-la restringindo os valores das variáveis inteiras aos dois inteiros mais próximos sucessivamente, retendo a solução que proporcionar o valor da função objetivo mais alto. Em relação à variáveis binárias, é adotado o mesmo procedimento. No entanto, mesmo assim a introdução de variáveis inteiras ou binárias corresponde, rigorosamente, à consideração de não linearidades no problema, o que justifica classificar os problemas que as inclui como de PNL.

A aplicação mais comum da PM com números inteiros é a consideração de atividades cuja contribuição ao resultado econômico global não é constante por unidade de área. A depreciação de máquinas e equipamentos, assalariados permanentes e impostos não proporcionais à área cultivada ou à produção só podem ser expressos por variáveis cujos valores são números inteiros. A formulação da função objetivo com estas variáveis não apresenta nenhuma particularidade, sendo que os pacotes informáticos específicos de PM geralmente permitem que se defina um certo número de variáveis inteiras. A formulação de restrições que ligam as variáveis em números inteiros às atividades permite que seja estabelecido um limite máximo para a escala de produção de tais atividades por unidade da variável em número inteiro considerada. Por exemplo, pode-se definir a área máxima que uma colheitadeira pode ser utilizada para uma ou mais culturas e a partir disso analisar a viabilidade ou não da compra da colheitadeira dada a superfície disponível para tais culturas na UPA.

4.1.1.Exercício

A partir dos dados da questão do exercício 2.10. reformule o programa considerando que para o plantio de milho o agricultor deve adquirir uma plantadeira cuja depreciação anual é de R$ 600,00.

Formulação e solução do problema (LINGO):

```
!PROGRAMAÇÃO EM SISTEMAS DE PRODUÇÃO VEGETAL;
MAX = 320*SOJA + 400*MILHO + 50*TRIGO + 40*COLZA - 600*P;
!SUPERFICIE AGRICOLA UTIL;
[SAUV] SOJA + MILHO <= 50;
[SAUI] TRIGO + COLZA <= 50;
!RESTRICOES DE TRABALHO;
[MDOUT] 5*MILHO <= 208;
[MDNOV] 5*SOJA <= 208;
[MDABR] 3*SOJA + 5*MILHO <= 208;
[MDMAI] 4*TRIGO + 5*COLZA <= 208;
[MDSET] 5*TRIGO + 9*COLZA <= 208;
!ROTACOES;
[ROT1] TRIGO - SOJA <= 0;
[ROT2] MILHO - COLZA <= 0;
```

```
!LIGACAO;
[DGF] MILHO - 100*P <= 0;
@GIN(P);
```

```
Objective value:                 18173.33

                       Variable           Value        Reduced Cost
                           SOJA        26.88889           0.0000000
                          MILHO        23.11111           0.0000000
                          TRIGO       0.0000000            16.66667
                          COLZA        23.11111           0.0000000
                              P        1.000000            600.0000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        18173.33            1.000000
                           SAUV       0.0000000            320.0000
                           SAUI        26.88889           0.0000000
                          MDOUT        92.44444           0.0000000
                          MDNOV        73.55556           0.0000000
                          MDABR        11.77778           0.0000000
                          MDMAI        92.44444           0.0000000
                          MDSET       0.0000000            13.33333
                           ROT1        26.88889           0.0000000
                           ROT2       0.0000000            80.00000
                            DGF        76.88889           0.0000000
```

Os resultados obtidos neste problema são idênticos ao do outro exercício (2.10), proposto sem a aquisição de uma plantadeira, porém subtraindo do resultado econômico o valor de R$ 600,00 referente à depreciação anual da plantadeira.

4.2. Programação com números binários

A possibilidade de representar números binários em problemas de programação matemática permite o desenvolvimento de várias aplicações interessantes para a análise e o planejamento de sistemas de produção agropecuária. Discutiremos aqui duas dessas aplicações: a modelagem da escolha de sistemas excludentes e a modelagem de itinerários técnicos.

4.2.1. Modelagem da escolha de sistemas excludentes

A escolha de atividades ou sistemas excludentes entre si é efetuada por meio de variáveis em números binários, ou seja, números que só podem assumir os valores zero ou um. A formulação de problemas de PM com números é muito semelhante à de problemas com números inteiros. Assim, as atividades relacionadas a cada sistema excludente devem estar ligadas a uma variável binária diferente. Porém, além disso, deve ser também formulada uma restrição determinando que a soma de todas as variáveis binárias deve ser igual a 1 (ou, para facilitar a solução, menor ou igual a 1). Assim, apenas um sistema poderá ser selecionado, sendo os demais excluídos (na medida em que apenas um poderá assumir o valor da unidade, sendo os demais de valor zero).

4.2.1.1. Exercício

No quadro abaixo estão apresentadas a margem bruta/ha e as necessidades de trabalho de culturas olerícolas convencionais e orgânicas.

Tabela 1.: Margem bruta por hectare e as necessidades de trabalho das culturas olerícolas.

	Atividades							
	Tomate conven.	Tomate orgân.	Cebola conven.	Cebola orgân.	Alho conven.	Alho orgân.	Repolho conven.	Repolho orgân.
MB/ha	3000	4000	2000	3000	2500	3500	1500	2000
Trabalho plantio (h/ha)	30	40	20	25	20	25	10	20
Trabalho tratos culturais (h/ha)	5	40	6	35	6	35	10	30
Trabalho colheita (h/ha)	50	50	40	40	40	40	30	30

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Formule um modelo de programação que indique a área de cada cultura a ser plantada, em sistema (exclusivamente) convencional ou orgânico, de modo que o agricultor maximize a margem bruta a ser obtida considerando uma disponibilidade de área de 5 hectares e de trabalho de 208 horas/mês.

Formulação e solução do problema (LINGO):

```
!PROGRAMACAO EM SISTEMAS DE PRODUÇÃO EXCLUDENTES;
MAX = 3000*TC + 4000*TO + 2000*CC + 3000*CO + 2500*AC + 3500*AO + 1500*RC +
2000*RO;
!Restricoes de trabalho;
[WPL]30*TC + 40*TO + 20*CC + 25*CO + 20*AC + 25*AO + 10*RC + 20*RO <= 208;
[WTC]5*TC + 40*TO+ 6*CC + 35*CO + 6*AC+ 35*AO + 10*RC + 30*RO <= 208;
[WCO]50*TC + 50*TO + 40*CC + 40*CO + 40*AC + 40*AO + 30*RC + 30*RO <= 208;
!Restricoes de area;
[SAU]TC + TO + CC + CO + AC + AO + RC + RO <= 5;
!Restricoes para escolha de sistema;
[ORGA]TO + CO + AO + RO - 90*ORG <= 0;
[CONVE]TC + CC + AC + RC - 90*CONV <= 0;
!Restricoes de exclusao;
```

[EXC]ORG + CONV <=1;
@BIN(ORG);
@BIN(CONV);

```
Objective value:                17900.00


                        Variable           Value        Reduced Cost
                              TC        0.0000000            1000.000
                              TO        0.8000000           0.0000000
                              CC        0.0000000            1500.000
                              CO        0.0000000            500.0000
                              AC        0.0000000            1000.000
                              AO         4.200000           0.0000000
                              RC        0.0000000            1500.000
                              RO        0.0000000            1000.000
                             ORG         1.000000           0.0000000
                            CONV        0.0000000           0.0000000

                             Row    Slack or Surplus      Dual Price
                               1         17900.00            1.000000
                             WPL         71.00000           0.0000000
                             WTC         29.00000           0.0000000
                             WCO        0.0000000            50.00000
                             SAU        0.0000000            1500.000
                            ORGA         85.00000           0.0000000
                           CONVE        0.0000000           0.0000000
                             EXC        0.0000000           0.0000000
```

Conforme pode ser analisado no modelo de programação formulado acima, o sistema é exclusivamente orgânico, sendo 0,8 ha de tomate orgânico e 4,2 ha de alho orgânico. Em relação ao custo marginal de substituição das atividades, é possível verificar que para cada hectare de tomate convencional, de alho convencional e de repolho orgânico cultivado haveria uma redução de R$ 1.000,00 na função objetivo, para cada unidade cultivada com cebola convencional e com repolho convencional o decréscimo seria de R$ 1.500,00 e com a cebola orgânica seria de R$ 500,00. A produtividade marginal da área é de R$ 1.500,00/ha, durante o período de colheita o agricultor utiliza toda a mão-de-obra disponível e a produtividade marginal do trabalho neste período é de R$ 50,00/hora.

4.2.2. Modelagem de itinerários técnicos

A possibilidade de representar números binários permite a modelagem de árvores de decisão por meio da programação matemática e, assim, a otimização de itinerários técnicos de culturas e criações.

A utilização de arvores de decisão é uma maneira bastante interessante de formalizar a solução de problemas que envolvem várias decisões sucessivas, seguidas ou não de eventos incertos. Por exemplo, um agricultor deve realizar cada operação (como preparo do solo, semeadura, capinas, aplicação de defensivos e colheita) que compõe um itinerário técnico de uma cultura procurando ajustar suas decisões em função do resultado de cada operação visando à obtenção de um resultado econômico global que lhe seja satisfatório. As alternativas que o agricultor deve escolher, e os eventos que decorrem de cada decisão, podem ser representados por uma "árvore" que vai se ramificando ao longo do tempo. O itinerário técnico resultante das escolhas do agricultor forma determinados caminhos dentro desta árvore (correspondente aos seus "ramos") cuja computação representa os resultados econômicos que ele pode obter com o mesmo. Os nós de onde partem ramos que representam decisões a serem tomadas são convencionalmente representados por quadrados (□), enquanto que os nós de onde partem ramos que representam eventos aleatórios são representados por círculos (○).

Na figura 4.2.2. é apresentada uma árvore de decisão, de forma bastante simplificada, que representa o processo decisório de um agricultor que deve escolher entre produzir uma cultura visando um alto rendimento, o que acarretaria maiores custos, ou um baixo rendimento, com custos também mais baixos. A figura mostra o potencial de resultado econômico (margem bruta ou valor agregado bruto) assim como as probabilidades da ocorrência de perdas severas, de perdas moderadas e da cultura não sofrer perdas, associadas a cada alternativa. Tomando como critério o valor monetário esperado (VME) o agricultor pode comparar as alternativas, ou seja,

Alternativa de alto rendimento: VME = 1200 - (0,3*1000 + 0,6*300 + 0,1*0) = 720

Alternativa de baixo rendimento: VME = 700 - (0,15*400 + 0,8*200 + 0,05*0) = 480

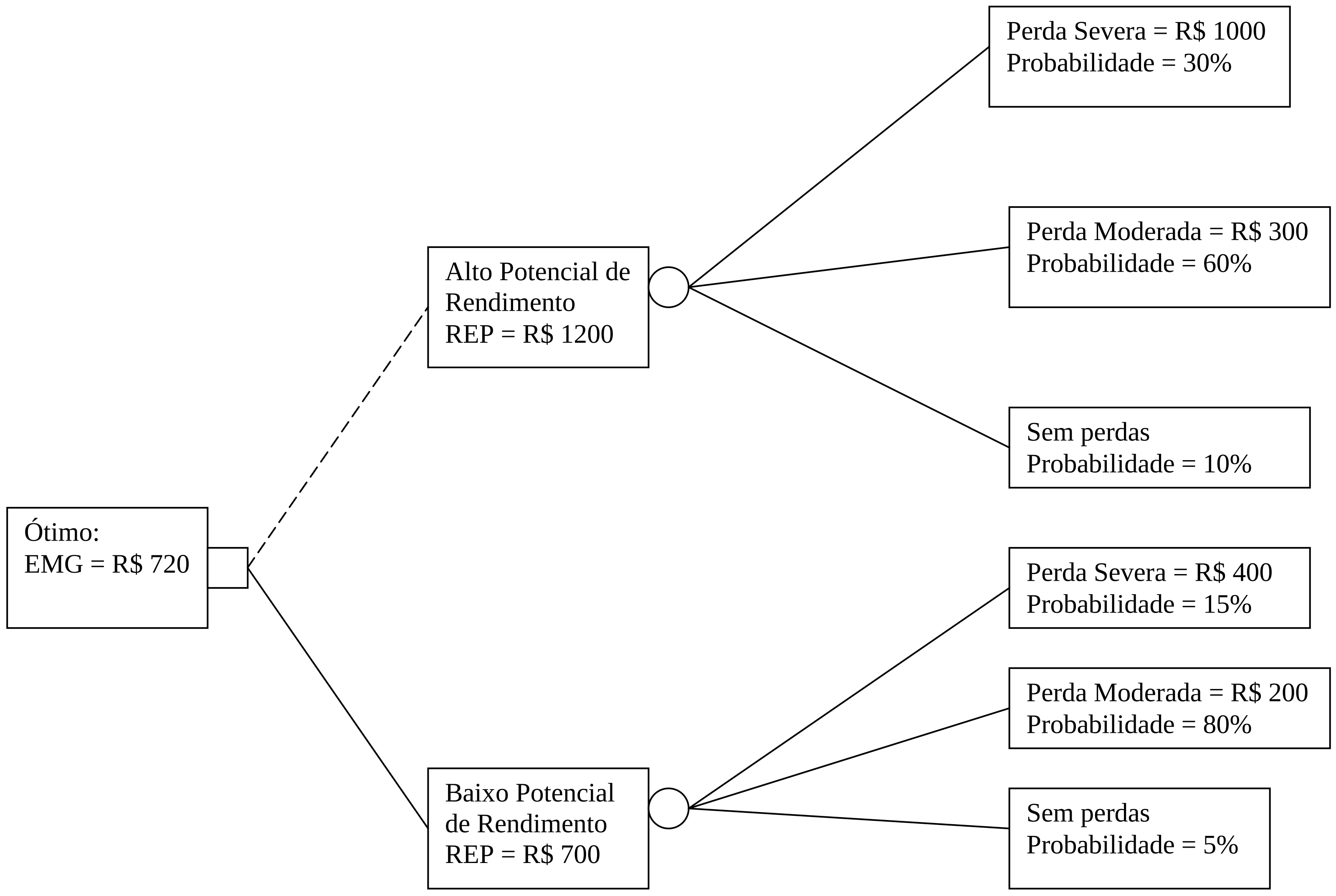
Portanto, adotando o VME como critério de decisão o agricultor deveria escolher o itinerário técnico que proporcionaria um alto rendimento potencial. Porém, é interessante observar que, neste caso, está-se assumindo que o agricultor é indiferente ao risco. Um agricultor com uma alta aversão ao risco (que poderia ser provocada, por exemplo, por um alto endividamento) poderia preferir escolher o itinerário técnico de baixo rendimento. Isto porque, conforme os dados do problema, em 30% dos anos a cultura de alto rendimento proporcionaria ao agricultor um resultado econômico de apenas R$ 200 e o menor resultado econômico da cultura de baixo rendimento, além de ser mais elevado (R$ 300), ocorreria em apenas 15% dos anos.

Enfim, embora o VME seja bastante utilizado, é importante salientar que existem outros critérios[9], inclusive não probabilistas, que poderiam ser mais adequados. De qualquer forma, a representação de processos decisórios por meio de árvores de decisão é bastante útil, independentemente do critério específico utilizado.

---

[9] Ver capítulo 5.

A formulação de problemas de programação matemática a partir de árvores de decisão pode ser realizada considerando-se as alternativas de decisão como variáveis binárias. Assim, de forma análoga à utilizada para a formulação de problemas de escolha entre sistemas excludentes, discutida no item anterior, deve ser formulada uma restrição determinando que a soma de todas as variáveis binárias deve ser igual a 1 (ou,


Perda Severa = R$ 1000
Probabilidade = 30%
Perda Moderada = R$ 300
Probabilidade = 60%
Alto Potencial de Rendimento
REP = R$ 1200
Sem perdas
Probabilidade = 10%
Ótimo:
EMG = R$ 720
Perda Severa = R$ 400
Probabilidade = 15%
Perda Moderada = R$ 200
Probabilidade = 80%
Baixo Potencial de Rendimento
REP = R$ 700
Sem perdas
Probabilidade = 5%

para facilitar a solução, menor ou igual a 1) de modo que apenas uma alternativa possa ser selecionada, excluindo as demais (na medida em que apenas uma poderá assumir o valor da unidade, sendo as demais de valor zero).

4.2.2.1. Exercícios

Formule um problema de programação a partir da árvore de decisão mostrada na figura 4.2.2. e obtenha a solução.

```
Modelo:
! OTIMIZACAO DO ITINERARIO TECNICO DE UMA CULTURA;

MAX = C - PSA - PMA - PSB - PMB; !COEFICIENTE DO RESULTADO
ECONOMICO POR HA;@FREE(C);
[RSP] C - 1200*A - 700*B <= 0; !RESULTADO SEM PERDA;
[EAB] A + B <= 1;@BIN(MA);@BIN(MB); !ESCOLHA: ITINERARIO A
(ALTO RENDIMENTO) OU ITINERARIO B (BAIXO RENDIMENTO);
[REAPS] 0.3*1000*A - PSA = 0; !RESULTADO DO ITINERARIO A COM
PERDA SEVERA;
[REAPM] 0.6*300*A - PMA = 0; !RESULTADO DO ITINERARIO A COM
PERDA MODERADA;
[REBPS] 0.15*400*B - PSB = 0; !RESULTADO DO ITINERARIO B COM
PERDA SEVERA;
[REBPM] 0.8*200*B - PMB = 0; !RESULTADO DO ITINERARIO B COM
PERDA MODERADA;
```

Solução:

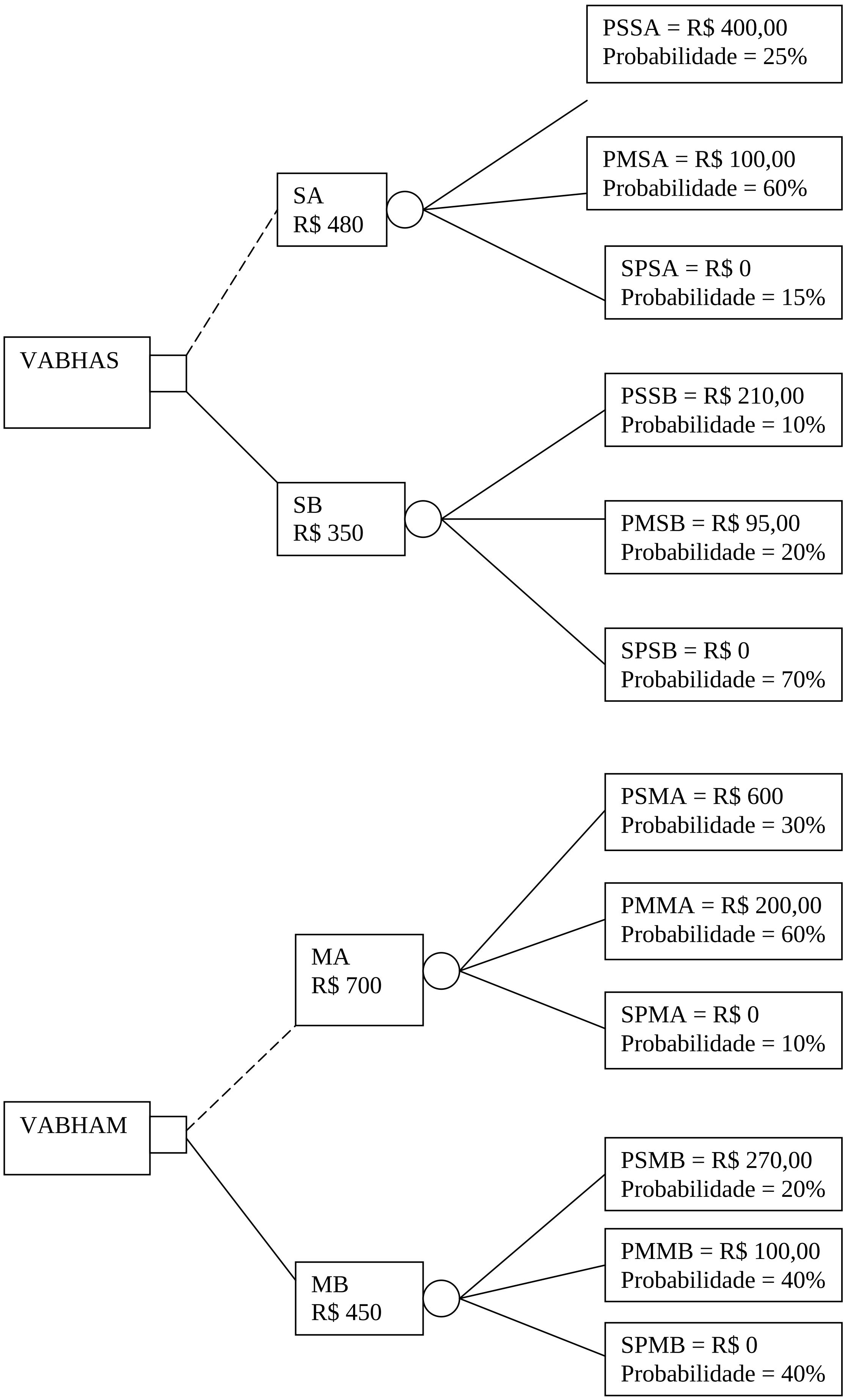
```
Objective value:                720.0000

                   Variable           Value        Reduced Cost
                          C        1200.000           0.0000000
                        PSA        300.0000           0.0000000
                        PMA        180.0000           0.0000000
                        PSB       0.0000000           0.0000000
                          A        1.000000           0.0000000
                          B       0.0000000           0.0000000
                         MA       0.0000000           0.0000000
                         MB       0.0000000           0.0000000
                        PMB       0.0000000           0.8750000

                        Row    Slack or Surplus      Dual Price
                          1        720.0000            1.000000
                        RSP       0.0000000            1.000000
                        EAB       0.0000000            720.0000
                      REAPS       0.0000000            1.000000
                      REAPM       0.0000000            1.000000
                      REBPS       0.0000000            2.000000
                      REBPM       0.0000000          -0.8750000
```

Um agricultor deseja otimizar o itinerário técnico e a combinação de atividades em seu sistema de produção. Ele pode escolher entre produzir soja e/ou milho, sendo que ele dispõe de 50 hectares de terra e 850 horas de trabalho. A cultura da soja demanda 15 horas/hectare de trabalho e a cultura do milho 20 horas/hectare. Para definir o itinerário técnico para a cultura da soja o agricultor pode escolher entre um sistema de alto rendimento cujo resultado econômico potencial (margem bruta) é de R$ 480/ha ou um sistema de baixo rendimento, cujo resultado econômico potencial é de R$ 350/ha. O sistema de alto rendimento para a soja teria, no entanto, 25% de probabilidade de sofrer uma perda "severa" de R$ 400/ha, ou poderia sofrer uma perda "moderada" de R$ 100/ha (60% de probabilidade) ou ainda poderia produzir sem perdas (probabilidade de 15%). Já no sistema de baixo potencial de resultado econômico, as perdas severas e moderas seriam de R$ 210/ha e R$ 95/ha respectivamente, e as probabilidades seriam de 10% (perda severa), 20% (perda moderada) e 70% (produção sem perdas). Da mesma forma, para a cultura do milho as opções também são de um sistema de alto ou um sistema de baixo potencial de rendimento físico, os quais proporcionariam, respectivamente, resultados econômicos potenciais de R$ 700/ha e R$ 450/ha. As perdas (probabilidades) as quais o sistema de alto rendimento estaria sujeito seriam de R$ 600/ha (30%), R$ 200/ha (60%) e sem perda (10%). Para o sistema de baixo rendimento de milho, as perdas (probabilidades) seriam de 270/ha (20%), R$ 100/ha (40%) e sem perda (40%). Formalize as opções que o agricultor dispõe para definir os sistemas de cultura mais vantajosos (alto ou baixo rendimento) por meio de árvores de decisão e formule um problema de programação matemática que otimize o sistema de produção a partir do valor monetário esperado.

Respostas: Árvores de decisão para a cultura da soja e do milho.



Modelo de programação:

```
TITLE SISTEMA SOJA E MILHO COM OTIMIZAÇÃO DOS ITINERÁRIOS
TÉCNICOS;
!CULTURAS DE ALTO X BAIXO RENDIMENTO;

MAX = VABHAS*SOJA + VABHAM*MILHO;

!PROBABILIDADE DE PERDAS;
PPSSOJAA = 0.25; !PERDA SEVERA SOJA A;
PPMSOJAA = 0.6; !PERDA MODERADA SOJA A;
PSPSOJAA = 0.15; !SEM PERDA SOJA A;
PPSSOJAB = 0.1; !PERDA SEVERA SOJA B;
PPMSOJAB = 0.2; !PERDA MODERADA SOJA B;
PSPSOJAB = 0.7; !SEM PERDA SOJA B;
PPSMILHOA = 0.3; !PERDA SEVERA MILHO A;
PPMMILHOA =0.6; !PERDA MODERADA MILHO A;
PSPMILHOA = 0.1; !SEM PERDA MILHO A;
PPSMILHOB = 0.2; !PERDA SEVERA MILHO B;
PPMMILHOB = 0.4; !PERDA MODERADA MILHO B;
PSPMILHOB = 0.4; !SEM PERDA MILHO B;


!ITINERÁRIO TÉCNICO DA SOJA;
[LCFS] VABHAS = S - PSSA - PMSA -PSSB - PMSB;@FREE(S);
[LSAB] S - 480*SA - 350*SB <= 0; !RESULTADO SEM PERDA;
[EABS] SA + SB <= 1;@BIN(SA);@BIN(SB); !ESCOLHA ITINERARIO
SOJA A (ALTO RENDIMENTO)OU SOJA B (BAIXO RENDIMENTO);
[PPSSA] PPSSOJAA*400*SA - PSSA = 0; !RESULTADO DO ITINERARIO
DA SOJA A COM PERDA SEVERA;
[PPMSA] PPMSOJAA*100*SA - PMSA = 0; !RESULTADO DO ITINERARIO
DA SOJA A COM PERDA MODERADA;
[PSPSA] PSPSOJAA*0*SA - SPSA = 0;  !RESULTADO DO ITINERARIO DA
SOJA A SEM PERDA;
[PPSSB] PPSSOJAB*210*SB - PSSB = 0; !RESULTADO DO ITINERARIO
DA SOJA B COM PERDA SEVERA;
[PPMSB] PPMSOJAB*95*SB - PMSB = 0; !RESULTADO DO ITINERARIO DA
SOJA B COM PERDA MODERADA;
[PSPSB] PSPSOJAB*0*SB - SPSB = 0; ! RESULTADO DO ITINERARIO DA
SOJA B SEM PERDA;


!ITINERÁRIO TÉCNICO DO MILHO;
[LCFM] VABHAM = M - PSMA - PMMA - PSMB - PMMB;@FREE(M);
[LMAB] M - 700*MA - 450*MB <= 0; !RESULTADO SEM PERDA;
[EABM] MA + MB <= 1;@BIN(MA);@BIN(MB); !ESCOLHA ITINERARIO
MILHO A (ALTO RENDIMENTO) OU MIHO B (BAIXO RENDIMENTO);
```

```
[PPSMA] PPSMILHOA*600*MA - PSMA = 0; !RESULTADO DO ITINERARIO
DO MILHO A COM PERDA SEVERA;
[PPMMA] PPMMILHOA*200*MA - PMMA = 0; !RESULTADO DO ITINERARIO
DO MILHO A COM PERDA MODERADA;
[PSPMA] PSPMILHOA*0*MA - SPMA = 0; !RESULTADO DO ITINERARIO DO
MILHO A SEM PERDA;
[PPSMB] PPSMILHOB*270*MB - PSMB = 0; !RESULTADO DO ITINERARIO
DO MILHO B COM PERDA SEVERA;
[PPMMB] PPMMILHOB*100*MB - PMMB = 0; !RESULTADO DO ITINERAIRO
DO MILHO B COM PERDA MODERADA;
[PSPMB] PSPMILHOB*0*MB - SPMB = 0; !RESULTADO DO ITINERARIO DO
MILHO B SEM PERDA;



!SUPERFÍCIE AGRÍCOLA ÚTIL;
[SAU] SOJA + MILHO <= 50;

!MÃO-DE-OBRA FAMILIAR;
[WF] 15*SOJA + 20*MILHO <= 850;
```

Solução do modelo:

```
Objective value:                 17600.00

                       Variable           Value        Reduced Cost
                         VABHAS        320.0000            0.0000000
                           SOJA        30.00000            0.0000000
                         VABHAM        400.0000            0.0000000
                          MILHO        20.00000            0.0000000
                       PPSSOJAA       0.2500000            0.0000000
                       PPMSOJAA       0.6000000            0.0000000
                       PSPSOJAA       0.1500000            0.0000000
                       PPSSOJAB       0.1000000            0.0000000
                       PPMSOJAB       0.2000000            0.0000000
                       PSPSOJAB       0.7000000            0.0000000
                      PPSMILHOA       0.3000000            0.0000000
                      PPMMILHOA       0.6000000            0.0000000
                      PSPMILHOA       0.1000000            0.0000000
                      PPSMILHOB       0.2000000            0.0000000
                      PPMMILHOB       0.4000000            0.0000000
                      PSPMILHOB       0.4000000            0.0000000
                              S        480.0000            0.0000000
                           PSSA        100.0000            0.0000000
                           PMSA        60.00000            0.0000000
                           PSSB       0.0000000            0.0000000
                           PMSB       0.0000000            0.0000000
                             SA        1.000000             880.0000
                             SB       0.0000000            0.0000000
                           SPSA       0.0000000            0.0000000
                           SPSB       0.0000000            0.0000000
```

M	700.0000	0.0000000
PSMA	180.0000	0.0000000
PMMA	120.0000	0.0000000
PSMB	0.0000000	0.0000000
PMMB	0.0000000	0.0000000
MA	1.000000	0.0000000
MB	0.0000000	0.0000000
SPMA	0.0000000	0.0000000
SPMB	0.0000000	0.0000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	17600.00	1.000000
2	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000
7	0.0000000	0.0000000
8	0.0000000	0.0000000
9	0.0000000	0.0000000
10	0.0000000	0.0000000
11	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	0.0000000
LCFS	0.0000000	1.000000
LSAB	0.0000000	0.0000000
EABS	0.0000000	0.0000000
PPSSA	0.0000000	0.0000000
PPMSA	0.0000000	0.0000000
PSPSA	0.0000000	0.0000000
PPSSB	0.0000000	0.0000000
PPMSB	0.0000000	0.0000000
PSPSB	0.0000000	0.0000000
LCFM	0.0000000	0.0000000
LMAB	0.0000000	0.0000000
EABM	0.0000000	0.0000000
PPSMA	0.0000000	0.0000000
PPMMA	0.0000000	0.0000000
PSPMA	0.0000000	0.0000000
PPSMB	0.0000000	0.0000000
PPMMB	0.0000000	0.0000000
PSPMB	0.0000000	0.0000000
SAU	0.0000000	0.0000000
WF	0.0000000	0.0000000

4.3. Programação com relações não lineares: minimização da variância dos resultados econômicos

A otimização de sistemas de produção agrícolas sob condições de risco é uma das aplicações clássicas da programação não linear. Neste tipo de modelo procura-se definir as combinações de atividades que permitem tornar mais regulares os resultados econômicos em relação à média por meio da minimização da sua variância. Como a variância é uma medida não linear dos desvios, o modelo torna-se de programação não linear.

Existem várias versões do modelo de minimização da variância. O mais simples são aqueles em que a função objetivo consiste apenas na minimização da variância, sendo então introduzida uma restrição que determina o resultado econômico desejado. Ou seja,

$$\text{Minimizar } \sigma^2$$
$$\text{sujeito a}$$
$$\sum c >= r$$

Onde: c = Resultado econômico das atividades

σ^2 = Variância do resultado econômico

r = Resultado econômico a ser obtido (definido "a priori")

Em outra versão, mais completa, a função objetivo maximiza o resultado mínimo, dada uma certa aversão ao risco atribuída ao agricultor. A formulação da função objetivo, neste caso, consiste no resultado econômico menos o desvio padrão multiplicado por um coeficiente de aversão ao risco. Assumindo que os desvios obedecem uma distribuição normal, a função objetivo assim formulada fornece um resultado econômico cuja probabilidade de ocorrência é determinada pelo coeficiente de aversão ao risco. Isto é,

$$\text{Maximizar } \sum c - a\,\sigma$$

Onde: a = coeficiente de aversão ao risco

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ = desvio padrão do resultado econômico

De qualquer forma, pode-se afirmar que os modelos de minimização da variância sempre incluem um elemento subjetivo, quer seja pela definição do resultado econômico a ser atingido, quer pela atribuição de um certo coeficiente de aversão ao risco (ou probabilidade de obtenção do resultado econômico otimizado).

4.3.1.Exercício

Um agricultor deseja maximizar o seu resultado econômico, para isto, ele dispõe das informações referentes à safra de cinco anos passados. O resultado econômico obtido nestes anos e a média dos mesmos estão descritos na tabela abaixo:

Tabela 2.: Características obtidas em safras passadas.

	Atividades		
Ano	Soja	Milho	Feijão
1	100	300	590

2	250	100	390
3	50	150	450
4	150	350	20
5	200	100	300
Média	150	200	350

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Formule um problema de programação não linear de modo que o agricultor maximize o resultado econômico que seria obtido com 95% de probabilidade (ou seja, 95% de probabilidade de obter pelo menos o resultado econômico indicado na função objetivo).

Formulação e solução do problema (LINGO):

```
TITLE PROBLEMA PROBABILISTICO;

MAX = RE - t*DP;

[T1]    (((100-150)*soja + (300-200)*milho + (590-350)*feijao)^2) = V1;
[T2]    (((250-150)*soja + (100-200)*milho + (390-350)*feijao)^2) = V2;
[T3]    (((50-150)*soja +  (150-200)*milho + (450-350)*feijao)^2) = V3;
[T4]    (((150-150)*soja + (350-200)*milho + (20-350)*feijao)^2) = V4;
[T5]    (((200-150)*soja + (100-200)*milho + (300-350)*feijao)^2) = V5;

[DPD] ((V1+V2+V3+V4+V5)/5)^0.5 = DP;

[MED]150*soja + 200*milho + 350*feijao = RE;

[NOR] @PTD(4,t) = 0.95;

[SAU] soja + milho + feijao <= 100;

@FREE(V1);
@FREE(V2);
@FREE(V3);
@FREE(V4);
@FREE(V5);
```

```
Objective value:                  13092.62

                              Variable           Value        Reduced Cost
                                    RE        20944.89           0.0000000
                                     T        2.131847           0.0000000
                                    DP        3683.318           0.0000000
                                  SOJA        44.52631            200.0000
                                 MILHO        34.33234            150.0000
                                FEIJAO        21.14135           0.0000000
                                    V1     0.3944898E+08        0.5787844E-04
```

```
 V2        3478412.          0.5787844E-04
 V3      0.1644394E+08       0.5787844E-04
 V4        3337172.          0.5787845E-04
 V5        5125635.          0.5787843E-04

Row    Slack or Surplus      Dual Price
  1        13092.62           1.000000
 T1       0.0000000          0.0000000
 T2       0.0000000          0.0000000
 T3       0.0000000          0.0000000
 T4       0.0000000          0.0000000
 T5       0.0000000          0.0000000
DPD       0.0000000           2.131847
MED       0.0000000          -1.000000
NOR       0.0000000          -65520.18
SAU       0.0000000           350.0000
```

Comentários: a função objetivo obtida é de R$ 13.092,62. Isto significa que o agricultor terá 95% de probabilidade de obter um resultado econômico igual ou maior do que este valor, caso adote o sistema de produção indicado na solução. Este resultado é alcançado por meio da combinação da função objetivo e da restrição onde figura a função @PTD(N,t) = P, que retorna a probabilidade "P" de se obter um valor "t", dado o grau de liberdade "N". Como no problema a probabilidade (P = 0,95) e o grau de liberdade (N = 4) são dados (variáveis independentes), a solução retorna "t" que é o número pelo qual o desvio padrão deve ser multiplicado e subtraído do resultado econômico médio (RE) para proporcionar o resultado mínimo que será obtido a 95% de probabilidade.

5. MODELAGEM DA INCERTEZA EM SISTEMAS DE PRODUÇÃO AGROPECUÁRIA

A incerteza dos resultados econômicos é uma das características mais importantes da atividade agropecuária. A estrutura concorrencial do mercado aliada à forte influência do clima sobre as atividades agropecuárias torna os preços e as produções particularmente instáveis neste setor. Neste sentido a consideração da incerteza em modelos de programação torna-se de grande importância. Por outro lado a modelagem da incerteza pela programação matemática levanta problemas, teóricos e práticos, de difícil tratamento. Nessa seção, à luz de alguns aspectos destes problemas, será proposta uma formulação que permita a consideração da incerteza em sistemas de produção de forma prática, (relativamente) fácil, e rigorosa.

5.1. Incerteza e Risco na agricultura

De uma maneira geral, tem-se uma situação de incerteza quando não se é capaz de prever um acontecimento futuro. Quando uma situação de incerteza está associada a uma potencial perda econômica, então tem-se uma situação de risco.

De um ponto de vista mais acadêmico, segundo Knight (1921), uma situação de incerteza se distingue de uma situação de risco pelo fato desta última poder ser associada a um cálculo probabilístico, ao contrário da primeira. Esta definição é muito comum, sendo adotada em muitos textos acadêmicos.

Outros autores afirmam que existem vários tipos de incerteza, os quais encontram-se sintetizadas no diagrama abaixo.

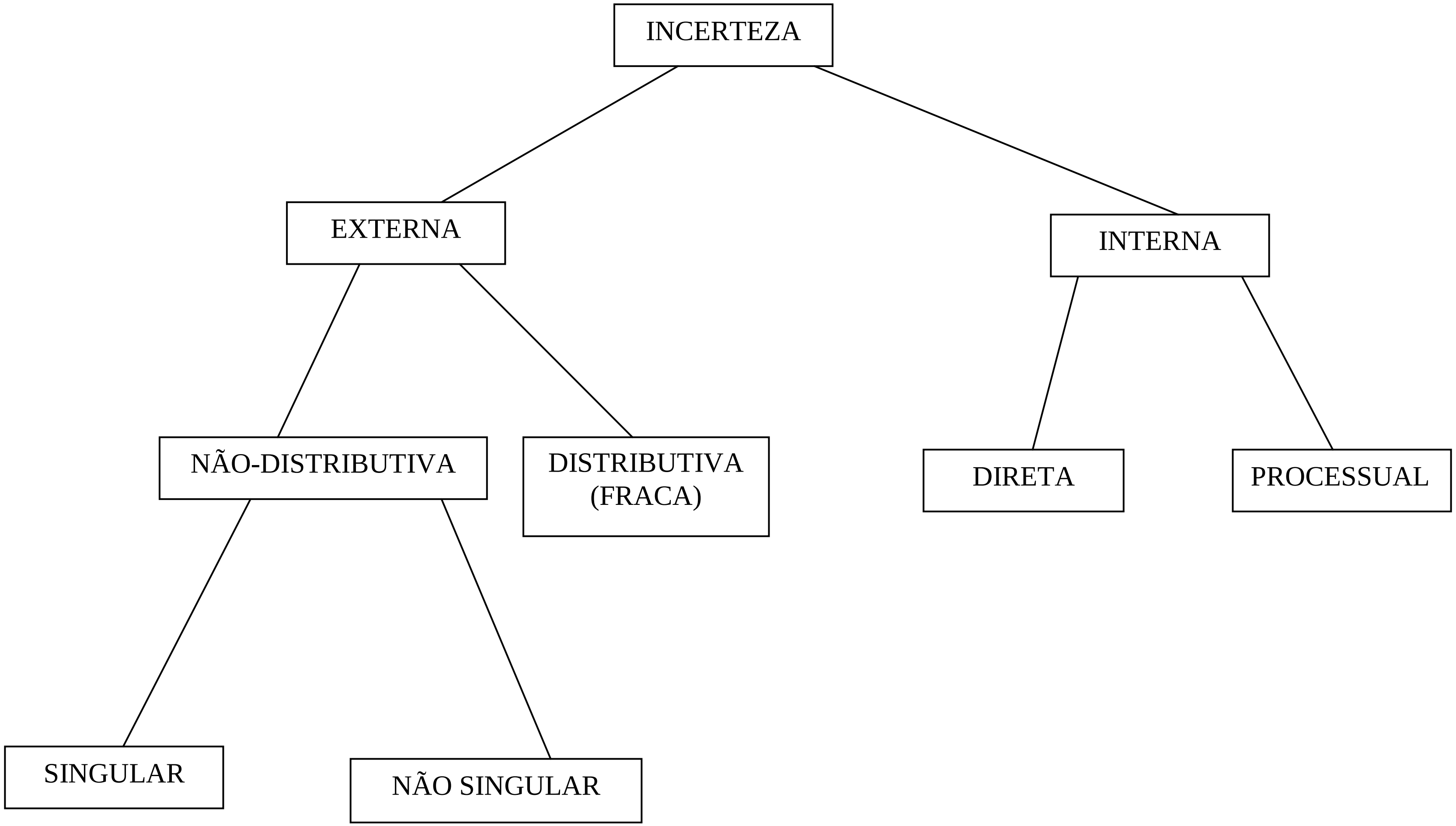
Assim, a incerteza pode ser externa, isto é, intrínseca à natureza dos eventos analisados, ou interna, isto é, devida a dificuldades em prever os eventos futuros inerentes ao observador.

A incerteza externa, por sua vez, pode ser de natureza distributiva, caso em que ela pode ser descrita apropriadamente por uma distribuição de probabilidade, ou não-distributiva, isto é, quando a ocorrência dos eventos não obedece à nenhuma distribuição estatística. A incerteza distributiva também é chamada de incerteza fraca, sendo os demais tipos de incerteza (externa não-distributiva e interna) denominados de incerteza forte (ou incerteza no sentido forte, como preferem alguns autores). Isto porque a incerteza distributiva (fraca) diz respeito a eventos para os quais observações efetuadas no passado permitem que se construa distribuições estatísticas confiáveis. Assim, a incerteza distributiva (fraca) supõe uma certa simetria entre passado e futuro. Este tipo de incerteza é a que se encontra associada à eventos aleatórios como, por exemplo, o clima. Já no caso dos demais tipos de incerteza (forte), observações de eventos passados, ou não estão disponíveis ou podem não produzir informações suficientes que permitem estabelecer distribuições estatísticas. Isto porque, neste último caso, o fenômeno analisado pode mudar qualitativamente o seu comportamento, não havendo nenhum tipo de tendência que possa ser identificado. Por exemplo, o comportamento dos preços de um produto pode mudar substancialmente a partir de uma nova política econômica ou outra mudança importante no contexto macroeconômico, sobre o qual não se pode encontrar nenhum indício nos dados do passado. A incerteza não-distributiva é denominada de singular quando ela está relacionada à eventos que não se repetem, ou seja, a ocorrência do evento pode destruir as condições para que ele ocorra novamente (por exemplo, no caso de uma guerra nuclear).

Quanto a incerteza interna, o observador pode não ser capaz de prever eventos futuros simplesmente por não ter informações suficientes sobre o mesmo, ou seja, por sua própria ignorância a respeito do fenômeno analisado. Neste caso a incerteza interna é denominada de direta e um aumento do conhecimento do fenômeno por parte do observador provoca a sua diminuição. Já no caso em que o observador não consegue efetuar previsões devido a dificuldades no cálculo dos resultados das relações entre causa e efeito relacionadas ao fenômeno analisado, a incerteza interna é denominada processual, ou segundo alguns, procedural. É interessante observar que, neste caso, um aumento da quantidade de informações sobre o fenômeno não provoca uma diminuição da incerteza, podendo até aumentá-la na medida em um aumento de informações exige uma capacidade de cálculo ainda maior do observador.

Os agricultores se defrontam com todos os tipos de incerteza descritos acima. A forte influência de fatores macroeconômicos não aleatórios sobre os preços, a falta de informações sobre o comportamento das atividades agropecuárias fazem com que a incerteza forte seja um aspecto incontornável da produção agropecuária.

Assim, embora os modelos probabilísticos de otimização sob incerteza serem os mais utilizados, por fornecerem resultados aparentemente precisos, a sua aplicação está longe de ser satisfatória.


INCERTEZA
EXTERNA
INTERNA
NÃO-DISTRIBUTIVA
DISTRIBUTIVA (FRACA)
DIRETA
PROCESSUAL
SINGULAR
NÃO SINGULAR

5.2. Modelagem da incerteza na programação matemática

A modelagem da incerteza forte exige que se disponha de algum critério formal de decisão. Porém ao contrário do critério probabilístico aplicado no caso da incerteza fraca, no caso da incerteza forte existem vários critérios formais (ou regras) de decisão, cada qual fornecendo, em geral, resultados diferentes dos demais.

5.2.1. O critério de Savage

Neste critério o principal objetivo é determinar os arrependimentos máximos que poderão acontecer para cada um dos eventos quando é tomada uma decisão. Savage define o conceito de perda relativa e perda de oportunidade "r_{ij}" que é associado a um resultado "x_{ij}" como a diferença entre o resultado da menor alternativa, dado que "e_j" é o verdadeiro estado da natureza e o resultado da alternativa "a_i" sob o estado "e_j":

$$r_{ij} = \max_{1 \le k \le m} \{\chi_{ij}\} - \chi_{ij}$$

Sendo assim, o verdadeiro estado em que se apresenta a natureza é "e_j" e o decisor elege a alternativa "a_i" que proporciona o máximo resultado "x_{ij}", então não tem deixado de ganhar nada, mas se elegesse outra alternativa qualquer "a_r", então obteria como ganho "x_{rj}" e deixaria de ganhar "x_{ij}-x_{rj}".

Savage indica escolher a alternativa que minimiza o arrependimento máximo, ou seja, aquela que proporcione a menor das maiores perdas relativas, definindo "r_i" como a maior perda que se pode obter ao selecionar a alternativa "a_i",

$$\rho_i = \max_{1 \le j \le n} \{r_{ij}\}$$

Então a regra de decisão de Savage é representada por:

Eleger a alternativa a_k tal que $\rho_K = \min \rho_\iota = \text{minimax } r_{ij}$

É necessário ressaltar que, como etapa precedente à aplicação deste critério, deve-se calcular a matriz de perdas relativas, a qual é formada pelos elementos "r_{ij}". Cada coluna desta matriz é obtida através do cálculo da diferença entre o valor máximo dessa coluna e de cada um dos valores que aparecem nela.

5.2.2. O critério de Hurwics

Este critério entende que poucos tomadores de decisão, de maneira geral, não são extremamente otimistas ou pessimistas, então considera-se que o decisor deve ordenar as alternativas de acordo com uma média ponderada dos níveis de segurança e otimismo.

Para cada alternativa de escolha, calcula-se o índice:

$$H\ (a_i) = (1\text{-}h) * \max_j\ (c_{ij}) + h * \min_j\ (c_{ij})$$

Onde "a_i" representa as alternativas de decisão, o "c_{ij}" corresponde ao lucro da alternativa "i" caso ocorra o evento "j" e o coeficiente "v" será um valor especifico escolhido pelo decisor com relação as chances de ocorrência de ótimos ou péssimos resultados.

Os valores de "h" próximos a 0 correspondem a um raciocínio otimista, obtendo-se no caso extremo h = 0 o critério de maximax.

Os valores de "h" próximos a 1 correspondem a um raciocínio otimista, obtendo-se no caso extremo h = 1 o critério de Wald.

Então, para a aplicação da regra de Hurwicz é preciso determinar o valor de "h", que é um valor próprio de cada decisor e é aplicável a todos os problemas em que ocorre a intervenção do mesmo.

Em geral os agricultores, ao se defrontar com situações de incerteza, atribuem um peso muito maior às possibilidades de perda, em relação à uma situação normal, do que às possibilidades de obter resultados elevados. Para dar conta disto, o critério de Hurwics pode ser modificado substituindo-se o resultado máximo pelo resultado médio (ou pelo resultado que seria obtido em uma situação considerada normal) na sua fórmula, ou seja,

$$H\ (a_i) = (1\text{-}h) * \text{med}\ (c_{ij}) + h * \min\ (c_{ij})$$

que denominamos critério de "Hurwics modificado".

5.2.3. O critério de Wald

O critério de Wald baseia-se numa visão pessimista do problema, na qual raciocina-se na tomada de decisão levando em consideração que ao optar por uma alternativa, o tomador de decisões poderá sofrer as piores conseqüências possíveis.

Como a alternativa "a_i" é o pior resultado possível que pode ocorrer, esta tem um valor para o decisor dado por:

$$S_i = \min_{1 \le j \le m} \mathrm{X}_{ij}$$

O nível de segurança da alternativa “a_i” é determinado por “*Si”* que representa a quantidade mínima que o decisor recebera caso decidir por tal alternativa. Segundo Wald, deve-se optar pela alternativa que proporcione o maior nível de segurança possível, porque ***S(a_i)=s_i.*** Sendo assim, a regra de decisão de Wald é representada por:

Eleger a alternativa a_k tal que $S_K = \max_{1 \le i \le m} S_i = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} X_{ij}$

De uma maneira geral, o critério de Wald propõe que o tomador de decisões deve verificar a quantidade mínima para cada alternativa e posteriormente optar por aquela que proporcionará o maior valor mínimo.

5.2.3.1. Aplicação dos critérios na tomada de decisão.

Todos os critérios de decisão sob incerteza discutidos têm seus méritos e defeitos.

A noção de arrependimento adotada no critério de Savage equivale ao custo de oportunidade, o qual está baseado no cálculo marginal. Como visto anteriormente o cálculo marginal é a base do processo de otimização. Assim, o critério de Savage apresenta uma consistência teórica com a otimização que poderia justificar a sua adoção em modelos de programação matemática de otimização sob incerteza. Porém, o critério de Savage não é independente de alternativas que, quando interpretadas de um ponto de vista absoluto, são irrelevantes. Isto porque, a princípio, um agente econômico que apresenta preferência por uma determinada alternativa não deve mudar sua preferência se novas alternativas irrelevantes (de um ponto de vista absoluto) lhe forem apresentadas. Por exemplo, se alguém deve escolher entre consumir bananas ou laranjas e manifestar preferência por laranjas, seria no mínimo curioso se ele passasse a preferir bananas se lhe fosse apresentada mais uma opção, por exemplo, a de consumir maçãs (e esta não fosse a fruta de sua preferência). A explicação da possibilidade de ocorrer decisões deste tipo quando o critério de Savage é utilizado é porque segundo este as alternativas são escolhidas a partir da comparação da utilidade que o tomador de decisão deixaria de obter[10] ao fazer uma opção. Isto pode ser exemplificado pelos dados apresentados nos dois quadros abaixo.

[10] Como no caso da modelagem de sistemas de produção a utilidade é medida em termos monetários, o critério de Savage baseia-se na quantia que o tomador de decisão deixaria de ganhar.

Quadro 1 - Escolha entre três atividades pelo critério de Savage (sem combinação).

Resultados				Arrependimentos			
Situação	A	B	C	Máximo	A	B	C
1	10	25	28	28	18	3	0
2	20	30	2	30	10	0	28
3	12	18	35	35	23	17	0
4	25	5	25	25	0	20	0
5	18	15	20	20	2	5	0
				Máximo	23	20	28
				Mínimo		20	=>Atividade B

Resultados						Arrependimentos			
Situação	A	B	C	D	Máximo	A	B	C	D
1	10	25	28	15	28	18	3	0	13
2	20	30	2	20	30	10	0	28	10
3	12	18	35	10	35	23	17	0	25
4	25	5	25	35	35	10	30	10	0
5	18	15	20	12	20	2	5	0	8
					Máximo	23	30	28	25
					Mínimo	23	=====>	Atividade A	

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Como pode ser observado no quadro 1, a atividade "B" é a escolhida pelo fato da sua escolha proporcionar o menor arrependimento máximo. No entanto, se introduzirmos a atividade "D" como mais uma possibilidade de escolha, como mostrado no quadro 2, a atividade escolhida passa a ser "A". Resultados deste tipo podem ser obtidos em modelos de otimização de sistemas de produção. Como nestes modelos mais do que uma atividade pode ser escolhida (combinações), a introdução de uma nova atividade pode repercutir na alteração na proporção entre as atividades presentes na base ótima, sem alterar esta última. (um exemplo disto é discutido no exercício presente no item 5.2.3.2. deste capítulo). Além disto, a utilização do critério de Savage em modelos de otimização sob incerteza apresenta o inconveniente da função objetivo ser de minimização, o que implica que pelo menos uma das restrições relativas aos recursos disponíveis (restrições externas) deve ser expressa como uma igualdade[11]. Assim, para a obtenção da solução ótima é necessário comparar as soluções obtidas com cada uma das restrições externas expressas como uma igualdade, escolhendo-se a que proporcionar o maior valor.

[11] Se as restrições externas expressarem apenas que as atividades não devem utilizar os recursos em um nível igual ou menor do que o disponível, o processo de minimização fará com que o nível das atividades seja nulo (zero).

O critério de Wald corresponde ao critério "maxmin", da teoria dos jogos, sendo, portanto, respaldado teoricamente por esta (REFERÊNCIA???). Neste caso, a sua aplicação pode ser interpretada como se o agricultor estivesse jogando com a natureza (a qual é um jogador "não inteligente", ou seja, cujas "respostas" não são específicas às estratégias que podem ser adotadas pelo agricultor). No entanto, o critério de Wald pressupõe um pessimismo extremo por parte do agente econômico, na medida em que a sua decisão é tomada apenas a partir das piores situações, sem que as possibilidades de ganhos permitidas por situações favoráveis sejam levadas em consideração. De um ponto de vista teórico, o pessimismo expresso pelo critério de Wald pode se justificar em situações em que não é possível conhecer todas os eventos futuros que poderão ocorrer. Neste caso, uma postura extremamente prudente e, portanto pessimista, pode ser considerada racional. É interessante observar que o critério de Wald tem sido proposto por certos pesquisadores para a modelagem do “princípio da precaução” evocado em situações de incerteza relacionadas à problemas ambientais (REFERÊNCIA???). Por outro lado, em algumas circunstâncias, com na ilustrada no quadro abaixo, este pessimismo pode parecer pouco lógico.

Quadro 2.: Escolha de atividades pelo critério de Wald (sem combinação).

	Atividade	
Situação	A	B
1	14.000	50
2	49	1.850
3	15.951	1.100
Média	10.000	1.000

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Segundo o critério de Wald a atividade "B" deveria ser escolhida. Porém, desta forma o agente econômico estaria escolhendo uma atividade que lhe renderia apenas uma unidade a mais de valor na pior situação, sendo que, nas demais situações, a outra atividade ("A") lhe proporcionaria valores muito superiores.

No entanto, caso seja julgado conveniente, o extremo pessimismo do critério de Wald pode ser relaxado, por meio de uma pequena alteração da sua formulação. Neste caso, o resultado mínimo maximizado na função objetivo é substituído pela maximização do resultado médio (ou pelo que seria obtido em uma situação considerada normal) e é introduzida uma restrição condicionando que o resultado mínimo seja maior do que um certo nível pré-definido. Assim, o resultado mínimo não é maximizado, mas apenas maior do que um nível considerado adequado. Esta formulação, característica de modelos denominados foco-perda, pode permitir que se obtenha soluções mais adequadas em relação à situação financeira específica da UPA modelada, atenuando assim o extremo pessimismo deste critério. De fato, as decisões dos agricultores diante da incerteza não são tomadas apenas em função das condições expressas pelos cenários. Outro elemento importante considerado pelos agricultores ao escolher suas atividades é a sua capacidade de absorver perdas de forma a assegurar condições de vida adequadas à sua família sem comprometer o funcionamento da sua UPA. E o que determina esta capacidade de absorver perdas são as reservas financeiras que ele dispõe. Assim, quanto maiores forem estas reservas, menor é o resultado econômico mínimo que deverá ser atingido pela UPA para assegurar a sua continuidade, resultado este que pode ser inferior ao obtido pela aplicação direta do critério de Wald, permitindo ao agricultor obter resultados econômicos maiores nas situações normais de produção.

Outra forma de amenizar o pessimismo que pressupõe o critério de Wald é por meio da introdução na sua formulação de um coeficiente de "pessimismo" que permita ponderar o peso atribuído às piores condições, em relação à consideração de condições mais favoráveis, no processo de tomada de decisão. Tal formulação corresponde ao critério de Hurwics, podendo ser utilizado, no caso da modelagem de sistemas de produção agropecuária, a adoção do critério de Hurwics modificado. É interessante observar que o critério de Hurwics modificado pode ser interpretado probabilisticamente, com o valor de "h" expressando a probabilidade subjetiva, isto é, atribuída pelo agricultor, de ocorrência da(s) pior(es) situação(ões) de produção e o valor de "1-h" a probabilidade subjetiva da ocorrência de uma situação considerada normal. No entanto, como o valor de "h" é determinado de forma subjetiva, as dificuldades para a sua estimativa podem dificultar a aplicação do critério de Hurwics.

A partir destas considerações pode-se considerar o critério de Wald (ou o modelo foco-perda dele derivado) como uma regra de decisão interessante para a formulação de modelos de programação matemática de otimização de UPAs sob condições de incerteza. Na próxima seção propõe-se um procedimento de modelagem por meio de cenários baseado neste critério.

5.2.3.2. A modelagem da incerteza por meio da construção de cenários

A incerteza forte, na medida em que ela está baseada quer na ignorância do tomador de decisão, quer na sua dificuldade em calcular todas as conseqüências das suas possíveis decisões, quer no fato do passado não fornecer informações que possam suportar decisões sobre o futuro, coloca o problema da definição das projeções sobre o futuro sobre as quais o tomador de decisão pode se basear para definir suas ações no presente. Neste caso, a definição de cenários que representem uma síntese do conhecimento do agente pode ser uma forma de fornecer alguma base para a tomada de decisão, embora a definição de tais cenários não pode deixar de ser algo subjetiva.

Assim, embora a construção dos cenários deva procurar representar todo o conhecimento que se tem sobre os possíveis comportamentos das variáveis a serem otimizadas, alguns aspectos práticos devem ser considerados. Evidentemente um cenário muitas vezes possível na atividade agropecuária é o de uma frustração total da produção de todas as atividades simultaneamente, isto é, o agricultor teria um ano sem nenhuma receita. Neste caso, é inútil procurar adequar o nível das atividades de forma a minimizar as perdas. Portanto, para prejuízos muito elevados, a formulação de modelos de programação sob incerteza pode não ser eficaz, sendo que outros meios, como a implantação de um sistema de seguro das atividades agropecuárias, são mais adequados para evitar as perdas decorrentes da perda total da produção. Os cenários em modelos de otimização sob incerteza devem, portanto, procurar representar situações em que uma alteração na relação entre os níveis das atividades seja capaz de contribuir para a diminuição das perdas decorrentes da variabilidade dos resultados econômicos destas, ou seja, no caso em que as perdas, simultaneamente de todas as atividades, não sejam totais, ou demasiado elevadas.

5.2.4. Exercícios

Um agricultor dispõe de 100 hectares e deseja otimizar a sua produção de grãos (soja, milho e feijão) sob condições de incerteza, havendo cinco situações além da situação normal, as quais proporcionam diferente margem bruta por atividade. Tais resultados por atividade em cada situação estão apresentados na tabela abaixo:

Tabela 1.: Resultados obtidos por atividade.

Situações	Soja	Milho	Feijão
Situação 1	100	300	590
Situação 2	200	140	390
Situação 3	100	270	450
Situação 4	150	90	20
Situação 5	200	170	300
Situação Normal	150	200	350

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Formule modelos de otimização sob incerteza no programa LINGO nos quais:
- utilizando o critério de Savage formule também um modelo considerando mais uma cultura (atividade "irrelevante") que proporcionaria apenas R$ 175/ha no cenário 4;
- utilizando os critérios de Wald e um modelo foco-perda, considerando neste último um resultado mínimo de R$ 10.000;
- utilizando o critério de Hurwicz com um valor de h = 0,2.

Modelos e soluções:

TITLE OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZA - Critério de Savage;

MIN = a;

[C1] (590-100)*soja + (590-300)*milho + (590-590)*feijao <= a;
[C2] (390-200)*soja + (390-140)*milho + (390-390)*feijao <= a;
[C3] (450-100)*soja + (450-270)*milho + (450-450)*feijao <= a;
[C4] (150-150)*soja + (150-90)*milho + (150-20)*feijao <= a;
[C5] (300-200)*soja + (300-170)*milho + (300-300)*feijao <= a;

[RNORM] 150*soja + 200*milho + 350*feijao = RN;

[SAU] soja + milho + feijao = 100;

```
Objective value:                   10274.19

 Model Title: OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZA - CRITéRIO DE SAVAGE

                              Variable           Value        Reduced Cost
                                     A        10274.19           0.0000000
                                  SOJA        20.96774           0.0000000
                                 MILHO       0.0000000            5.483870
```

```
FEIJAO        79.03226           0.0000000
    RN        30806.45           0.0000000

   Row    Slack or Surplus      Dual Price
     1        10274.19            1.000000
    C1       0.0000000           0.2096774
    C2        6290.323           0.0000000
    C3        2935.484           0.0000000
    C4       0.0000000           0.7903226
    C5        8177.419           0.0000000
 RNORM       0.0000000           0.0000000
   SAU       0.0000000           -102.7419
```

Resposta: conforme a solução do problema, o valor da variável “a” (minimizado na função objetivo) indica que o agricultor deixaria de ganhar no máximo R$ 10.274,19 cultivando 20,97 ha de soja e 79,03 ha de feijão, em relação ao plantio de apenas feijão no cenário um (C1) e ao plantio de apenas soja no cenário quatro (C4). Nos demais cenários o agricultor deixaria de ganhar uma quantia menor que R$ 10.274,19. Assim, no cenário dois (C2) o agricultor deixaria de ganhar R$ 10.274,19 - R$ 6.290,32 = R$ 3.983,87 em relação ao plantio de apenas feijão, e no cenário três (C3) deixaria de ganhar R$ 10.274,19 – R$ 2.935,48 = R$ 7.338,71, em relação ao plantio de apenas feijão. No cenário normal (RNORM) ele obteria R$ 30.806,45 com o sistema de produção soja e feijão.

A formulação do problema acima foi alterada para a introdução de mais uma atividade, ou seja,

```
TITLE OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZA - Critério de Savage c/atividade "irrelevante";

MIN = a;

[C1] (590-100)*soja + (590-300)*milho + (590-590)*feijao + (590-0)*AI <= a;
[C2] (390-200)*soja +  (390-140)*milho + (390-390)*feijao + (390-0)*AI <= a;
[C3] (450-100)*soja + (450-270)*milho + (450-450)*feijao + (450-0)*AI <= a;
[C4] (175-150)*soja +  (175-90)*milho + (175-20)*feijao + (175-175)*AI <= a;
[C5] (300-200)*soja + (300-170)*milho + (300-300)*feijao + (300-0)*AI <= a;

[RNORM]      150*soja + 200*milho + 350*feijao + 100*AI = RN;

[SAU] soja + milho + feijao + AI = 100;
```

```
Objective value:                 12250.00

 Model Title: OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZA - CRITéRIO DE SAVAGE C/ATIVIDADE
"IRRELEVANTE"
```

```
                 Variable           Value        Reduced Cost
                        A        12250.00           0.0000000
                     SOJA        25.00000           0.0000000
                    MILHO       0.0000000            5.483871
                   FEIJAO        75.00000           0.0000000
                       AI       0.0000000            1.209674
                       RN        30000.00           0.0000000

                      Row    Slack or Surplus      Dual Price
                        1        12250.00            1.000000
                       C1       0.0000000           0.2096774
                       C2        7500.000           0.0000000
                       C3        3500.000           0.0000000
                       C4       0.0000000           0.7903226
                       C5        9750.000           0.0000000
                    RNORM       0.0000000           0.0000000
                      SAU       0.0000000           -122.5000
```

Resposta: a solução do modelo de otimização sob incerteza utilizando o critério de Savage mostrada acima mostra que, ao introduzirmos uma atividade "irrelevante", o nível das atividades se altera em relação ao apresentado pela solução do problema anterior (a soja muda de 20,96 ha para 25 ha e o feijão muda de 78,02 ha para 75 ha), embora a atividade introduzida não figure na base ótima (não integrando o sistema de produção). Além disto, o resultado econômico que seria obtido pelo agricultor diminuiria (de R$ 30.806,45 para R$ 30.000,00). Uma sugestão de mudança deste tipo dificilmente seria aceita por um agricultor.

```
TITLE OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZA - Critério de Wald;
MAX = min;
[C1]    100*soja + 300*milho + 590*feijao >= min;
[C2]    200*soja +  140*milho + 390*feijao >= min;
[C3]    100*soja + 270*milho + 450*feijao >= min;
[C4]    150*soja +  90*milho + 20*feijao >= min;
[C5]    200*soja + 170*milho + 300*feijao >= min;
[RNORM]     150*soja + 200*milho + 350*feijao = RN;
[SAU] soja + milho + feijao <= 100;
```

```
Objective value:                  13695.65

 Model Title: OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZA - CRITéRIO DE WALD

                 Variable           Value        Reduced Cost
                      MIN        13695.65           0.0000000
                     SOJA        78.26087           0.0000000
                    MILHO        21.73913           0.0000000
                   FEIJAO       0.0000000            4.782616
```

```
      RN        16086.96           0.0000000

     Row    Slack or Surplus      Dual Price
       1        13695.65            1.000000
      C1        652.1739           0.0000000
      C2        5000.000           0.0000000
      C3       0.0000000          -0.2608696
      C4       0.0000000          -0.7391304
      C5        5652.174           0.0000000
   RNORM       0.0000000           0.0000000
     SAU       0.0000000            136.9565
```

Resposta: o agricultor iria cultivar 78,26 hectares de soja e 21,74 hectares de milho. Com este sistema ele obteria um resultado mínimo de R$ 13.695,65, no cenário três (C3) e no cenário quatro (C4). No cenário um (C1) o agricultor obteria R$ 13.695,65 + R$ 652,17 = R$14.347,82, no cenário dois (C2) R$ 13.695,65 + R$ 5000,00 = R$ 18.695,65 e no cenário cinco (C5) R$ 13.965,65 + R$ 5.652,17 = R$ 19.347,82. Na situação normal correspondente ao cenário “RNORM” o agricultor obteria R$ 16.086,96.

Considerando que, devido a uma maior disponibilidade de reservas financeiras por parte do agricultor, um resultado mínimo de R$ 10.000,00 seria suficiente para assegurar a viabilidade da UPA, o problema acima poderia ser reformulado para

```
TITLE OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZA - Modelo Foco-Perda;

MAX = RN;

[C1]    100*soja + 300*milho + 590*feijao >= min;
[C2]    200*soja +  140*milho + 390*feijao >= min;
[C3]    100*soja + 270*milho + 450*feijao >= min;
[C4]    150*soja +  90*milho + 20*feijao >= min;
[C5]    200*soja + 170*milho + 300*feijao >= min;

[RNORM]     150*soja + 200*milho + 350*feijao = RN;

[SAU] soja + milho + feijao <= 100;

[RMIN] min >= 10000;
```

```
Objective value:                 22692.31

 Model Title: OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZA - Modelo Foco-Perda

                Variable           Value        Reduced Cost
                      RN        22692.31           0.0000000
                    SOJA        61.53846           0.0000000
```

```
 MILHO       0.0000000          42.30769
FEIJAO        38.46154         0.0000000
   MIN        10000.00         0.0000000

   Row    Slack or Surplus      Dual Price
     1        22692.31          1.000000
    C1        18846.15         0.0000000
    C2        17307.69         0.0000000
    C3        13461.54         0.0000000
    C4       0.0000000         -1.538462
    C5        13846.15         0.0000000
 RNORM       0.0000000         -1.000000
   SAU       0.0000000          380.7692
  RMIN       0.0000000         -1.538462
```

A comparação da solução obtida com este modelo com a do modelo anterior indica que a maior disponibilidade financeira do agricultor permitiria um aumento do resultado que seria obtido no cenário normal em R$ 6.605,35 as custas de uma diminuição do resultado que seria obtido no pior cenário de R$ 3.695,65. Sob estas novas condições, o sistema de produção obtido seria modificado, caso em que o agricultor abandonaria a cultura do milho e passaria a cultivar feijão, diminuindo a área de soja.

```
TITLE OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZA - Critério de Hurwics;

MAX = h*maxi +(1- h)*mini;

[C1] 100*soja + 300*milho + 590*feijao = x1;
[C2] 200*soja +  140*milho + 390*feijao = x2;
[C3] 100*soja + 270*milho + 450*feijao = x3;
[C4] 150*soja +  90*milho + 20*feijao = x4;
[C5] 200*soja + 170*milho + 300*feijao = x5;

[MAXIMO] maxi = @SMAX(x1, x2, x3, x4, x5) ;
[MINIMO] mini = @SMIN(x1, x2, x3, x4, x5);

[RH] h = 0.2;

[RNORM]      150*soja + 200*milho + 350*feijao = RN;

[SAU] soja + milho + feijao <= 100;
```

```
Objective value:                 15312.50

 Model Title: OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZA - CRITéRIO DE HURWICS

                       Variable           Value        Reduced Cost
```

H	0.2000000	0.0000000
MAXI	21979.17	0.0000000
MINI	13645.83	0.0000000
SOJA	89.58333	0.0000000
MILHO	0.0000000	60.00000
FEIJAO	10.41667	66.00000
X1	15104.17	0.0000000
X2	21979.17	0.0000000
X3	13645.83	0.0000000
X4	13645.83	0.0000000
X5	21041.67	0.0000000
RN	17083.33	0.0000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	15312.50	1.000000
C1	0.0000000	0.0000000
C2	0.0000000	-0.2000000
C3	0.0000000	0.0000000
C4	0.0000000	-0.8000000
C5	0.0000000	0.0000000
MAXIMO	0.0000000	0.2000000
MINIMO	0.0000000	0.8000000
RH	0.0000000	8333.335
RNORM	0.0000000	0.0000000
SAU	0.0000000	160.0000

O critério de Hurwics permite considerar que o agricultor não é totalmente pessimista em relação ao futuro, o que é expresso pelo valor de “h” que é igual a 0,2. Segundo este critério ele plantaria 89,58 ha de soja e 10,42 ha de feijão. Com este sistema de produção ele obteria um resultado econômico máximo de R$ 21.979,17 e um mínimo de R$ 13.645,83. O resultado que seria obtido em condições normais seria de R$ 17.083,33. É interessante observar que segundo o critério de Wald (problema anterior) o resultado mínimo obtido seria maior, porém o resultado nas condições normais seria menor devido a este critério expressar um extremo pessimismo diante do futuro. Salientamos que quando o valor de “h” é nulo o critério de Hurwics torna-se idêntico ao critério de Wald. É interessante salientar mais uma vez que o critério de Hurwics pode se mostrar melhor adaptado para aplicações na agricultura se considerarmos que a estimativa da possibilidade de ocorrência de uma situação normal de produção provavelmente reflete melhor o grau de "otimismo" dos agricultores do que a estimativa da possibilidade da situação de maior resultado econômico (modelo de "Hurwics modificado").

5.2.4.1. Exemplo de modelo de otimização sob incerteza por meio da construção de cenários:

Um olericultor dispõe das culturas da alface, batata doce, cenoura e couve, para compor o seu sistema de produção. As características técnicas e econômicas destas culturas estão descritas no quadro abaixo:

Tabela 2.: Características técnicas e econômicas das culturas.

	Atividades			
	Alface	Batata Doce	Cenoura	Couve
Margem Bruta./ha	2000	1500	3000	2500
Horas Trabalho/ha em setembro	200	200		
Horas Trabalho/ha em outubro	250			
Horas Trabalho/ha em dezembro		200		
Horas Trabalho/ha em março			200	150
Horas Trabalho/ha em abril			250	200
Horas Trabalho/ha em junho			300	100

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

O agricultor dispõe de 2 hectares de SAU e de 650 horas mensais de trabalho, sendo que, para evitar um excessivo revolvimento do solo, ele não deve implantar as culturas "tuberosas" sucessivamente sobre o mesmo canteiro.

Para obter o preço estimado para a batata doce e a cenoura, o agricultor necessita comprar uma máquina beneficiadora (lavadeira) cuja depreciação é de R$ 200/ano.

O agricultor, pela sua experiência, sabe que a margem bruta da alface e da batata doce pode, simultaneamente, cair para R$ 500/ha e R$ 1000/ha, respectivamente. Em relação às culturas de cenoura e de couve, o agricultor sabe também que estas podem, simultaneamente, ter suas margens brutas reduzidas, para R$ 400/ha e R$ 600/ha, respectivamente. Além disto, ele considera razoável supor que cada uma das culturas, isoladamente, pode sofrer perdas que podem tornar nula a sua margem bruta.

A partir destas condições:

a) qual sistema de produção permitiria ao agricultor obter o máximo de margem bruta na(s) pior(es) situação(ções) previstas e, neste caso, qual margem bruta que ele obteria sob condições normais?

b) qual sistema de produção permitiria ao agricultor obter R$ 4.500 de margem bruta na(s) pior(es) situação(ções) previstas e qual margem bruta que ele obteria, neste caso, sob condições normais?

a) Modelo e Solução:

```
MAX = MIN;

[C1] 500 * A + 1000 * BD + 3000 * CN + 2500 * CV - 200 * LAV >= MIN;
[C2] 2000 * A + 1500 * BD + 400 * CN + 600 * CV - 200 * LAV >= MIN;
[C3] 0*A + 1500 * BD + 3000 * CN + 2500 * CV - 200 * LAV >= MIN;
[C4] 2000 * A + 0*BD + 3000 * CN + 2500 * CV - 200 * LAV >= MIN;
[C5] 2000 * A + 1500 * BD + 0*CN + 2500 * CV - 200 * LAV >= MIN;
[C6] 2000 * A + 1500 * BD + 3000 * CN + 0*CV - 200 * LAV >= MIN;
[CNORM] 2000 * A + 1500 * BD + 3000 * CN + 2500 * CV - 200 * LAV = RN;

[SAUV] A + BD < 2;
[SAUI] CN + CV < 2;

[SET] 200 * A + 200 * BD < 650;
[OUT] 250 * A < 650;
[DEZ] 200 * BD < 650;
[MAR] 200 * CN + 150 * CV < 650;
[ABR] 250 * CN + 200 * CV < 650;
[JUN] 300 * CN + 100 * CV < 650;

[ROT1] CN - A < 0;
[ROT2] BD - CV < 0;

[ELAV] BD + CN - 10 * LAV < 0;@GIN(LAV);
```

```
Objective value:                  4925.000

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            MIN        4925.000           0.0000000
                              A        2.000000           0.0000000
                             BD       0.0000000            500.0000
                             CN       0.3750000           0.0000000
                             CV        1.625000           0.0000000
                            LAV        1.000000            200.0000
                             RN        8987.500           0.0000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        4925.000            1.000000
                             C1        1062.500           0.0000000
                             C2       0.0000000          -0.9375000
                             C3        62.50000           0.0000000
                             C4        4062.500           0.0000000
                             C5        2937.500           0.0000000
                             C6       0.0000000          -0.6250000E-01
                          CNORM       0.0000000           0.0000000
                           SAUV       0.0000000            2000.000
                           SAUI       0.0000000            562.5000
                            SET        250.0000           0.0000000
```

```
 OUT        150.0000          0.0000000
 DEZ        650.0000          0.0000000
 MAR        331.2500          0.0000000
 ABR        231.2500          0.0000000
 JUN        375.0000          0.0000000
ROT1        1.625000          0.0000000
ROT2        1.625000          0.0000000
ELAV        9.625000          0.0000000
```

O agricultor iria cultivar 2 hectares de alface, 0,375 hectares de cenoura e 1,625 hectares de couve. Para tanto, ele precisaria adquirir uma máquina beneficiadora. Com este sistema ele obteria um resultado mínimo de R$ 4.925,00, no cenário dois – C2 (redução no rendimento da couve e da cenoura) e no cenário seis - C6 (resultado econômico nulo da couve).

b) Modelo e Solução:

```
MAX = RN;

[C1] 500 * A + 1000 * BD + 3000 * CN + 2500 * CV - 200 * LAV >= MIN;
[C2] 2000 * A + 1500 * BD + 400 * CN + 600 * CV - 200 * LAV >= MIN;
[C3] 0*A + 1500 * BD + 3000 * CN + 2500 * CV - 200 * LAV >= MIN;
[C4] 2000 * A + 0*BD + 3000 * CN + 2500 * CV - 200 * LAV >= MIN;
[C5] 2000 * A + 1500 * BD + 0*CN + 2500 * CV - 200 * LAV >= MIN;
[C6] 2000 * A + 1500 * BD + 3000 * CN + 0*CV - 200 * LAV >= MIN;
[CNORM] 2000 * A + 1500 * BD + 3000 * CN + 2500 * CV - 200 * LAV = RN;

[SAUV] A + BD < 2;
[SAUI] CN + CV < 2;

[SET] 200 * A + 200 * BD < 650;
[OUT] 250 * A < 650;
[DEZ] 200 * BD < 650;
[MAR] 200 * CN + 150 * CV < 650;
[ABR] 250 * CN + 200 * CV < 650;
[JUN] 300 * CN + 100 * CV < 650;

[ROT1] CN - A < 0;
[ROT2] BD - CV < 0;

[ELAV] BD + CN - 10 * LAV < 0;@GIN(LAV);

MIN >= 4500;
```

```
Objective value:                    9660.000

                       Variable           Value        Reduced Cost
```

RN	9660.000	0.0000000
A	2.000000	0.0000000
BD	0.0000000	600.0000
CN	1.720000	0.0000000
CV	0.2800000	0.0000000
LAV	1.000000	240.0000
MIN	4500.000	0.0000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	9660.000	1.000000
C1	2160.000	0.0000000
C2	156.0000	0.0000000
C3	1160.000	0.0000000
C4	5160.000	0.0000000
C5	0.0000000	-0.2000000
C6	4460.000	0.0000000
CNORM	0.0000000	-1.000000
SAUV	0.0000000	2400.000
SAUI	0.0000000	3000.000
SET	250.0000	0.0000000
OUT	150.0000	0.0000000
DEZ	650.0000	0.0000000
MAR	264.0000	0.0000000
ABR	164.0000	0.0000000
JUN	106.0000	0.0000000
ROT1	0.2800000	0.0000000
ROT2	0.2800000	0.0000000
ELAV	8.280000	0.0000000
20	0.0000000	-0.2000000

O agricultor iria realizar o cultivo de 2 ha de alface, 1,72 ha de cenoura e 0,28 ha de couve. Com este sistema ele obteria um resultado econômico mínimo de R$ 4.500,00 no cenário cinco – C5 (resultado econômico nulo da cenoura). Com este sistema o agricultor obteria R$ 9.660,00 no cenário normal.

Comparando a solução obtida com o modelo foco-perda com a solução obtida adotando o critério de Wald (item "a"), observa-se que uma diminuição de R$ 425,00 no resultado que seria obtido nas piores situações permitiria um aumento de R$ 672,50 no resultado que seria obtido sob condições normais de produção. Isto pode ser explicado pela expansão da área de cenoura, cultura que proporciona maior resultado em condições normais mas que apresenta maior potencial de perda, em detrimento da área couve, na solução do modelo foco-perda.

5.3. Modelagem da incerteza em sistemas com bovinocultura de leite

A otimização sob incerteza de sistemas de produção com bovinocultura de leite apresenta problemas particularmente difíceis, tanto do ponto de vista teórico quanto prático.

A origem de tais problemas reside no fato de que, em sistemas que envolvem a bovinocultura de leite, especialmente quando esta é realizada a pasto e se deseja considerar um alto grau de liberdade para a composição do sistema de alimentação, as conseqüências econômicas das variações dos rendimentos físicos de cada pastagem não podem ser definidas antes do processo de otimização. Isto porque o papel de cada pastagem no fornecimento de alimento ao rebanho depende das demais pastagens presentes no sistema. Por exemplo, se uma pastagem é responsável por todo o fornecimento de alimento ao rebanho, ela desempenhará um papel diferente do caso em que, a partir da sua combinação com outra fonte de alimento, ela for responsável pelo fornecimento de alimento em apenas um período do ano (ou em complemento com outras pastagens no mesmo período). Assim, uma mesma queda de rendimento desta pastagem terá repercussões diferentes, em cada um destes casos, sobre a produção de leite. Do ponto de vista teórico esta situação pode ser caracterizada como de "incerteza processual" (Dosi & Egidi, 1992), ou seja, o agente não é capaz de estimar uma solução ótima do problema devido à impossibilidade de avaliar as conseqüências de todas as alternativas em função das dificuldades de cálculo que tais avaliações levantam. No caso dos sistemas de produção com bovinocultura de leite, a incerteza processual é gerada pelo grande número de combinações possíveis entre as atividades forrageiras, cujas conseqüências econômicas não são possíveis de ser calculadas antes do processo de otimização, exceto as custas de uma severa limitação do grau de liberdade do sistema. Neste caso, a modelagem torna-se possível limitando-se a otimização à escolha entre sistemas de alimentação nos quais as proporções entre as áreas ocupadas por cada forrageira são pré-fixadas. No entanto, tal tipo de modelo, cuja formulação é extremamente laboriosa, é pouco eficiente para a análise de sistemas de produção.

Assim, a incerteza processual não permite a utilização de modelos probabilísticos para a otimização de sistemas de produção sob incerteza que incluem a bovinocultura de leite como uma das alternativas. Neste texto propomos um modelo de otimização sob incerteza da bovinocultura de leite por meio da construção de cenários, utilizando o critério de Wald[12], o qual procura obter a solução que proporciona o maior resultado econômico no(s) pior(es) cenário(s) previsto(s), para minimizar perdas devidas à incerteza. Algumas variações deste modelo também são discutidas, a saber, os modelos Foco-Perda e de Hurwics, cuja utilização, sob certas circunstâncias, podem ser consideradas mais vantajosas.

---

[12] ou como também é conhecido, critério maximin (Andrade, 198?)

Para a formulação dos cenários de perda são introduzidos no modelo de otimização da produção de leite, descrito no capítulo 3, mais cinco grupos de restrições. Basicamente, tais restrições expressam o resultado econômico obtido por meio do cálculo do quanto o consumo das vacas em lactação é afetado pelas quedas dos rendimentos das pastagens, considerando-se neste cálculo as eventuais sobras de pasto e o consumo das categorias de animais que não produzem leite.

A formulação destas restrições traz implícito que todas as perdas de rendimento das pastagens que afetam o consumo das vacas em lactação se repercutirão totalmente na produção de leite. Em outras palavras, a formulação supõe que se uma situação desfavorável provoca uma diminuição da ingestão de "x" megacalorias de energia pelas vacas em lactação, haverá "x" megacalorias a menos disponíveis para a produção de leite, não sendo considerada que as vacas mobilizam suas reservas corporais para manter a produção. No entanto, esta consideração pode ser facilmente introduzida no modelo por meio de uma restrição, ou seja,

$$\frac{\text{energia para produção de leite}}{\text{energia para produção de leite} + \text{energia para manutenção das vacas}} = \text{F}$$

Sendo então este coeficiente “F” multiplicado pela perda em leite.

A razão desta restrição não ter sido incluída no modelo é que a mobilização de reservas para a manutenção da produção de leite só ocorre, de forma significativa, em vacas de alto potencial de rendimento leiteiro e, ainda assim, apenas nas fases iniciais da lactação.

No modelo proposto, a possibilidade do agricultor penalizar mais os animais não produtivos no caso de uma diminuição do rendimento das pastagens, com o intuito de preservar as vacas em lactação e manter a produção de leite (procedimento comum entre os agricultores) não foi considerada explicitamente.

No entanto, a não consideração destas possibilidades não significa que, caso um agricultor adote um sistema de produção a partir da solução de um problema formulado segundo o modelo aqui proposto, as vacas não possam mobilizar algo das suas reservas para evitar a queda da produção de leite e, também, que o agricultor não possa manejar o seu rebanho de modo a minimizar o impacto de uma queda da disponibilidade de forragem sobre a produção de leite. Assim, embora os pressupostos implícitos no modelo levem a uma perda do seu poder de previsão, a formulação das restrições relativas aos cenários aumenta a confiabilidade do sistema de produção proposto pela sua solução, especialmente se considerarmos a incerteza gerada pela própria dificuldade de estimar os coeficientes técnicos e econômicos do modelo[13].

Assim, o primeiro grupo de restrições é formulado para fornecer a sobra de cada pasto, em cada mês do ano. As quantidades de pasto são expressas em área equivalente (áreas de pasto "consumidas", que "sobram" e totais). Desta forma, para um dado pasto *P* em um dado mês *M*, temos,

$CVPM + CRPM + SPM + TPM = 0$

onde

CVPM = área consumida pelas vacas em lactação do pasto *P* no mês *M*;

CRPM = área consumida pelos animais não produtivos;

SPM = área que sobra do pasto *P* no mês *M*;

TPM = área total do pasto *P* no mês *M*;

O segundo grupo de restrições é formulado para fornecer o quanto que a queda de rendimento do pasto afeta efetivamente o consumo das vacas em lactação. Nestas restrições é considerado que a queda do rendimento do pasto só afeta o consumo dos animais se ele for maior do que a quantidade de pasto que sobraria em condições normais de produção. Assim, a partir de *SPM*, *TPM*, definidos no grupo de restrição anteriormente descrito, e de uma dada perda aparente de pasto *PAP*, obtêm-se a perda efetiva *PEFPM* por meio de:

$TPM * PAP - SPM = PEFPM$

O terceiro grupo de restrições é formulado para obter o consumo final das vacas em lactação. A partir de *CVPM* e da *PEFPM* que foram definidos nos grupos de restrições anteriormente discutidos, é possível calcular o consumo das vacas em lactação do pasto P no mês M (*QCVLPM*). Sendo assim, temos para cada pasto:

$CVPM – PEFPM = QCVPM$

Posteriormente podemos obter o quarto grupo de restrições que tem como função fornecer a diminuição efetiva do consumo das vacas em lactação. Esta restrição é calculada a partir de *CVPM* e de *QCVPM*. Então teremos:

$CVPM – QCVPM = PEPM$

onde

PEPM = diminuição efetiva do consumo das vacas em lactação para cada pasto *P* no mês *M*.

[13] Para uma discussão sobre as relações entre o poder preditivo dos modelos de programação matemática e o seu uso na análise de sistemas de produção, ver a introdução geral deste texto.

O quinto grupo de restrições consiste na transformação da perda efetiva *PEPM*, que é expressa em área, em perda em leite. Assim, para cada pasto, temos:

$$(PEPM * RPM * TEP)/1{,}15 = PLPM$$

onde

RPM = rendimento do pasto P no mês M (kg/ha, por exemplo);

TEP = teor de energia do pasto P (Mcal/kg, por exemplo);

PLPM = perda em leite relacionada à queda do rendimento do pasto *P* no mês *M* (litros).

Enfim, além destes cinco grupos básicos, é necessário formular as restrições de ligação entre as perdas mensais de leite e a perda anual. A obtenção da perda econômica devida a queda da produção de leite pode então ser obtida pela multiplicação da perda em leite pelo preço deste produto. É esta a perda econômica que figura no cenário.

No modelo de otimização sob incerteza da bovinocultura de leite, aqui proposto, a função objetivo passa a ser o resultado econômico mínimo, definido a partir dos resultados econômicos obtidos nos cenários. Formalmente o modelo pode ser descrito como:

Maximizar R_M

Sujeito a

$Ax < = b$

$C`x > = R_M$

$cx = R_N$

Onde:

R_M = Vetor coluna dos resultado econômico nos piores cenários;

A = Matriz de coeficientes técnicos;

x = Vetor coluna do nível de atividades x;

b = Vetor coluna de recursos disponíveis;

C`= Matriz de cenários com perdas;

cx = Vetor de resultado econômico em situações normais;

R_N = Resultado econômico em condições normais de produção (não fixado).

Muitas vezes pode ser conveniente que o resultado econômico mínimo seja apenas delimitado acima de um valor considerado satisfatório, e não maximizado como na formulação acima. Por exemplo, a unidade de produção modelada pode ser capaz de suportar resultados econômicos mínimos relativamente baixos, sendo desnecessária uma grande penalização do resultado econômico que seria obtido em condições normais, a qual geralmente ocorre quando se procura maximizar o resultado econômico mínimo. Neste caso a estrutura formal básica do modelo seria a seguinte:

Maximizar cx

Sujeito a

Ax < = b

C\`x > = R_M

R_M >= R

Onde

R = resultado econômico suportável pela UPA sem risco de falência (fixado "a priori").

Enfim, em casos em que se deseje utilizar probabilidades subjetivas da ocorrência dos cenários que descrevem a situação normal e a(s) situações de perda(s), o modelo de Hurwics modificado pode ser interessante. A estrutura formal deste modelo é a seguinte:

Maximizar (1-h) $R_{(max)}$ + h $R_{(min)}$

Sujeito a

Ax < = b

C\`x > = R

onde

h = probabilidade subjetiva de ocorrência da(s) pior(es) situação(ões);

R = vetor coluna dos resultados econômicos obtidos em cada cenário, dentre os quais $R_{(max)}$ é o resultado máximo e $R_{(min)}$ é o resultado mínimo.

5.3.1. Exercício[14]

Um agricultor especializado na bovinocultura de leite deseja otimizar seu sistema produção levando em consideração as incertezas em relação aos rendimentos físicos e ao preço. Ele dispõe de 50 ha e 416 horas de trabalho familiar por mês.

As atividades que podem compor o sistema de alimentação do gado leiteiro estão descritas na tabela abaixo.

Tabela 3.: Rendimento, teor de energia, custo e necessidade de trabalho das atividades que podem compor o sistema de criação.

Atividade	Rendimento (kg MS /ha)	Energia (Mcal/kg MS)	Custo (R$/ha)	Trabalho (horas/mes
Potreiro	2000	1,7	10	1 (outubro)

[14] Os dados deste exercício são idênticos ao do exercício de otimização da produção de leite apresentado na página 49, exceto no que diz respeito aos cenários de incerteza.

Capim Elefante	5000	1,8	50	1 (setembro)
Milheto	4000	1,8	250	2 (setembro)
Sorgo	4000	1,8	250	2 (agosto)
Aveia	3000	2	200	2 (abril)
Azevém	3000	2	100	2 (maio)
Silagem	8000	2	600	6 (janeiro) 4 (outubro)
Ração	xxxxxxxxxx	3	0,6	xxxxxxxxxx

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

A ordenha e o fornecimento de alimentos de distribuição livre (silagem e ração) demanda 10 horas/mês/vaca em lactação. A proporção de vacas em lactação em relação ao total de vacas é de 70% e a taxa de mortalidade é de 3% a.a., sendo que as novilhas têm sua primeira parição no final do seu segundo ano de vida. O preço do leite é R$ 0,4/litro e da carne R$ 1,1/Kg PV. O custo variável anual (exceto no que diz respeito à alimentação) por vaca em lactação é de R$ 20/cabeça, por vaca seca R$ 10/cabeça, por terneiro R$ 15/cabeça e por novilha R$ 5/cabeça. O peso das vacas é de 500 Kg PV e a capacidade de ingestão de matéria seca pelos animais é de 3% PV/dia.

Na tabela abaixo, é apresentada a proporção das categorias animais do rebanho em relação às vacas em lactação, assim como o peso dos animais de cada categoria, e a sua exigência de energia (NRC, 1988).

Tabela 4.: Características do rebanho.

		Peso/cab	EM/cab/dia	EM/cab/mes
	Cabeças	(kg)	(Mcal/dia)	(Mcal/mes)
Vacas lactação	1,00	500	14,17	425,16
Vacas secas	0,43	500	17,01	510,19
Nov. 1-2 anos	0,49	337,5	17,07	512,09
Nov. 2-3 anos	0,00	0	0,00	0,00
Nov 3-4 anos	0,00	0	0,00	0,00
Terneiros fêmeas	0,50	112,5	7,76	232,86

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Na tabela abaixo estão apresentadas as distribuições percentuais do rendimento de matéria seca e energia fornecida pelas pastagens ao longo do ano (NRC, 1988).

Tabela 5.: Rendimento físico das pastagens (Kg MS/ha).

mes	Potreiro	Capim Elefante	Milheto	Sorgo	Aveia	Azevém
jan	20%	25%	25%	25%		
fev	10%	15%	20%	20%		
mar	7%	10%	10%	10%		
abr	5%	10%	10%	5%		

mai	3%	0%	5%			
jun	2%	0%			20%	
jul	1%	0%			30%	20%
ago	2%	0%			30%	30%
set	10%	5%		5%	20%	35%
out	10%	10%	5%	10%		15%
nov	15%	10%	10%	10%		
dez	15%	15%	15%	15%		

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

O teor de energia, em megacalorias por quilo de matéria seca (Mcal/kg MS), do potreiro é de 1,7, do capim elefante, do milheto e do sorgo de 1,8, da aveia, do azevém e da silagem de 2,0 e da ração de 3,0.

Para considerar as incertezas relativas aos rendimentos e ao preço do leite, foram especificados alguns cenários a partir da identificação das causas prováveis das perdas. A tabela abaixo apresenta o rendimento por hectare das forrageiras obtido em cada cenário.

Tabela 6.: Rendimento em diferentes cenários de produção.

	Rendimento por hectare das forrageiras						
Cenário\Forrageira	Potreiro	Capim Elefante	Milheto	Sorgo	Aveia	Azevém	Silagem
Normal	2000	5000	4000	4000	3000	3000	8000
Seca no verão	1000	1500	1200	1600			1600
Excesso de chuva no inverno	1400				1500	1200	1600

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Além destes cenários, foi considerada uma possibilidade de 20% de queda do preço do leite, a partir da qual foi elaborado mais um cenário.

Discussão dos resultados

A formulação completa deste modelo no programa LINGO encontra-se no anexo 2.

Efetuamos uma análise dos principais resultados obtidos, comparando-os com a solução do problema sem a consideração da incerteza.

Na tabela abaixo estão apresentadas as soluções do modelo com maximização do rendimento normal (sem incerteza) e do modelo com maximização do rendimento mínimo.

Tabela 7.: Soluções dos modelos de maximização do resultado normal e de maximização do resultado mínimo.

	Máximização do Rend	Máximização do Rend.	Diferença

	Normal (sem incerteza)	Mínimo (com incerteza)	
Situação Normal	56.920	55.633	1.287
Pior Situação	37.041	42.937	5.896

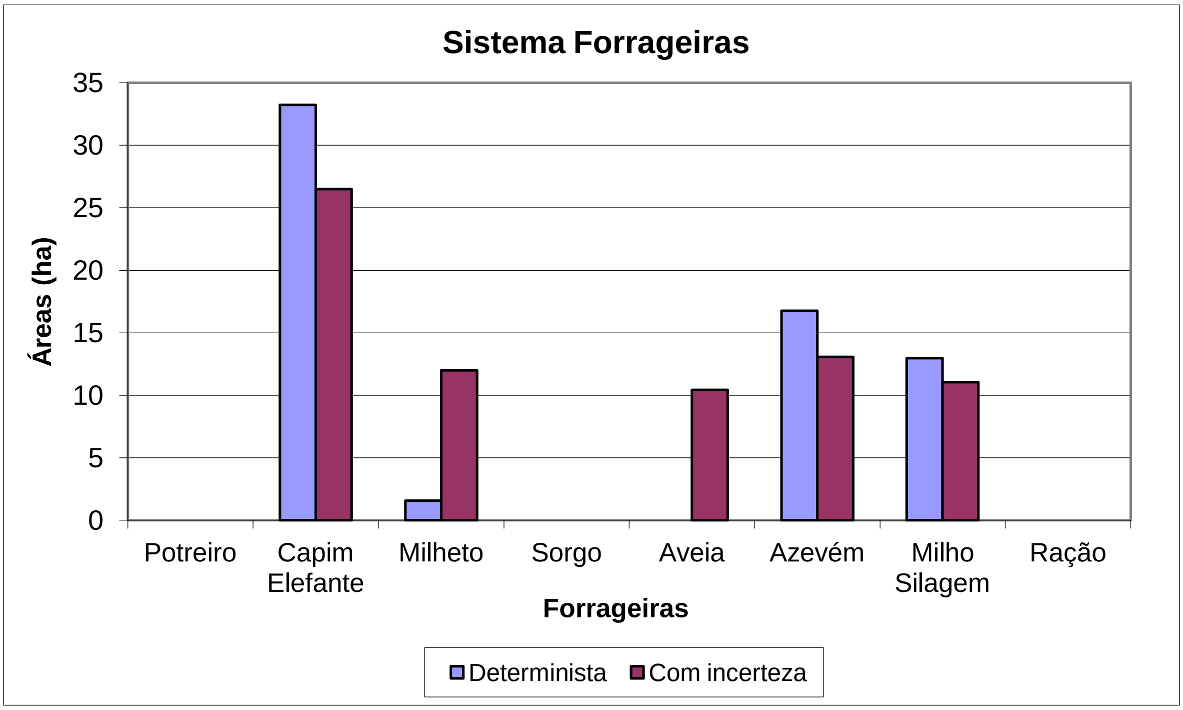
Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Conforme pode ser observado, a solução do modelo com incerteza apresenta um resultado econômico mínimo (na pior situação) superior ao da solução do modelo sem incerteza. No entanto, também pode ser observado na tabela que isto ocorre as custas de uma diminuição do resultado econômico que o agricultor obteria na situação normal. Assim, sob condições normais, ao optar pela maximização do rendimento mínimo, o agricultor deixaria de agregar ao seu resultado econômico um valor de R$ 1.287. Porém tal resultado seria alcançado com uma segurança muito maior, na medida em que na pior situação ele teria um resultado de R$ 5.896 a mais do que no sistema sugerido pelo modelo sem incerteza.

Na solução apresentada pelo modelo com incerteza, o processo de otimização levou os três cenários de perda (cenário de perda no verão, cenário de perda no inverno e cenário de perda no preço do leite) a apresentar o mesmo resultado econômico, o qual é de R$ 42.937. Já na solução do modelo sem incerteza, o resultado mínimo assegurado é de R$ 37.041, correspondente ao cenário de perda no inverno, sendo de R$ 40.876 para o cenário de perda no verão e de R$ 44.491 para o cenário de perda no preço do leite. Tais resultados indicam uma boa eficiência do modelo na medida em que este permite a obtenção de um resultado mínimo bem mais elevado as custas de uma pequena diminuição do resultado econômico em condições normais, em relação aos resultados obtidos com o modelo sem incerteza.

O rebanho e a produção de leite são muito semelhantes nos dois modelos. No modelo com incerteza o rebanho total é composto por 99 animais, com 35 vacas em lactação as quais apresentam um rendimento médio de 12,4 litros de leite por vaca por dia. No modelo sem incerteza, o rebanho é formado por 96, com 34 vacas em lactação as quais alcançam um rendimento de 12,5 litros de leite por vaca por dia. Assim as escalas de produção indicadas pelas soluções dos dois modelos são bastante semelhantes (155.372 litros anuais, indicada pelo modelo sem incerteza, e 158.700 litros anuais, indicada pelo modelo com incerteza).

No gráfico abaixo são apresentadas as áreas das forrageiras propostas pelas soluções dos modelos sem e com incerteza.



Observa-se que a maior segurança proporcionada pelo modelo com incerteza foi acompanhada por uma diversificação das culturas forrageiras. Assim, enquanto no modelo sem incerteza a dieta dos animais é composta basicamente pelo capim elefante, azevém e milho silagem, no modelo com incerteza além destas pastagens, a aveia e o milheto também compõem a dieta.

A comparação das soluções dos modelos de otimização da bovinocultura de leite com e sem incerteza efetuada acima ajudam a explicar as dificuldades que certos técnicos enfrentam no aconselhamento aos agricultores. Isto porque ainda são raros os técnicos que levam em consideração, de forma metódica e coerente, as incertezas relativas aos rendimentos e aos preços ao prestar assistência técnica aos agricultores. As soluções dos modelos discutidos acima ilustram o fato de que se pode aumentar significativamente a estabilidade dos resultados econômicos obtidos por um sistema de produção a partir de modificações relativamente pequenas, porém importantes, das suas atividades. Porém, tais modificações podem parecer irracionais caso a incerteza não seja adequadamente considerada. No exercício discutido acima, por exemplo, as áreas de aveia e de milheto podem parecer irracionais, caso a incerteza seja ignorada.

5.3.2. Exercício

A partir dos dados do exercício anterior (5.3.1) com incerteza, elaborar um modelo de programação matemática no LINGO considerando que o agricultor deseja maximizar o resultado econômico que a ser obtido em condições normais de produção mas precisa garantir um resultado econômico mínimo de R$ 40.000.

Resultados

A formulação deste modelo (realizada a partir do modelo do exercício anterior) está apresentada no anexo 3.

Os resultados obtidos, comparados com a solução do modelo do exercício anterior (maximização do resultado mínimo) encontram-se descritos na tabela abaixo.

Tabela 8.: Solução do modelo foco-perda e do modelo considerando somente a incerteza.

	Foco-Perda (R Min >= 40000)	Máximização do Rend. Mínimo (com incerteza)	Diferença
Situação Normal	56.601	55.633	968
Pior Situação	40.000	42.937	2.937

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Na tabela acima observa-se que a maximização do resultado mínimo teve como conseqüência uma diminuição do resultado que seria obtido em condições normais, quando comparada com a simples limitação do resultado mínimo, obtido por meio do modelo foco-perda. Assim, em condições normais, ao optar pelo modelo foco-perda o agricultor obteria um resultado de R$ 968 a mais do que no sistema sugerido pelo modelo com somente incerteza. Porém na pior situação o agricultor deixaria de ganhar R$ 2.937 em relação ao que ele obteria caso procurasse ajustar o seu sistema de produção para maximizar o resultado mínimo.

5.3.3. Exercício

A partir dos dados do exercício anterior (5.3.1) sob condições de incerteza, elaborar um modelo de programação matemática no LINGO considerando que o agricultor estima uma probabilidade de 80% de que a pior situação irá ocorrer e 20% de que a produção ocorrerá segundo condições normais (h = 0,2).

Discussão dos resultados

A formulação deste modelo (a partir do modelo do exercício 5.3.1.) encontra-se no anexo 4.

Os principais resultados obtidos no modelo estão expostos na tabela abaixo comparativamente com a solução do outro modelo de maximização do resultado mínimo (exercício 5.3.1).

Tabela 9.: Solução do modelo de Hurwics e do modelo de maximização do resultado mínimo.

	Hurwics modificado (h = 0,2)	Máximização do Rend. Mínimo (com incerteza)	Diferença
Situação Normal	56.591	55.633	958
Pior Situação	40.054	42.937	2.883

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Vale lembrar que o modelo de maximização do resultado mínimo o agricultor se comporta como se ele tivesse certeza da ocorrência da pior situação (ou de uma das piores situações). Assim, interpretando o modelo de maximização do resultado mínimo nos termos do modelo de Hurwics, naquele modelo, implicitamente, h = 0.

Portanto, os resultados mostrados na tabela acima indicam que uma postura um pouco mais otimista em relação ao futuro pode se traduzir em mudanças significativas em relação aos resultados que podem ser proporcionados pelos sistemas de produção, especialmente no que diz respeito aos resultados mínimos. Assim, ao optar pelo critério de Hurwics modificado, em condições normais de produção o agricultor ganharia R$ 958 a mais do que no sistema sugerido pelo modelo de maximização do resultado mínimo. No entanto, como pode ser observado na tabela, com sistema de produção sugerido pela aplicação do critério de Hurwics o agricultor obteria R$ 2.883 a menos na(s) pior(es) situação(ões).

6. MODELOS DE APOIO À DECISÃO DE AGRICULTURES BASEADOS NA PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Desde o início deste texto salientamos que a construção de modelos de sistemas de produção por meio da programação matemática visa, acima de tudo, a exploração das possibilidades oferecidas pelas condições de funcionamento de uma unidade de produção agropecuária. Neste sentido, a programação matemática é muito mais um instrumento de análise do que de previsão, devido à impossibilidade de uma formalização suficientemente exaustiva de um sistema de produção. Isto nos levou a propor uma certa relativização do próprio termo "otimização", na medida em que um sistema de produção só é "ótimo" estritamente em função das condições que foram consideradas para a sua formalização e, também, em função da forma como estas condições forma formalizadas, especialmente no que diz respeito ao tipo de relações entre as variáveis (linear ou não-linear) e ao seu grau de agregação.

A partir destas considerações, as técnicas de modelagem descritas neste texto foram concebidas com uma preocupação mais analítica do que normativa enfatizando-se, por exemplo, a análise as relações de causa e efeito entre, por um lado, as soluções obtidas e, por outro lado, a disponibilidade de recursos, as técnicas utilizadas (representadas pelos coeficientes das variáveis), as condições de incerteza e a aversão a tais condições apresentadas pelos agricultores.

Evidentemente, a análise de um sistema de produção não representa um fim em si mesma, isto é, raramente analisamos um sistema de produção apenas para conhecê-lo, mas sim para usar este conhecimento para modificá-lo de forma que ele melhor responda as necessidades dos agricultores. E para tanto, mesmo um modelo determinista que indica simplesmente o sistema de produção que, nas condições descritas pelo modelo, maximizaria o resultado econômico pode ser extremamente útil.

No entanto, a utilização da programação matemática para a modelagem de sistemas de produção pode ser utilizada de uma maneira mais explícita para o planejamento de sistemas de produção junto aos agricultores. Assim, modelos de "apoio à decisão", ou seja, que respondam à necessidades mais específicas de uma unidade de produção podem ser formulados por meio da programação matemática. Porém, como já foi salientado anteriormente, a programação matemática presta-se melhor para a formulação de modelos para o apoio a decisões de caráter mais estratégico, isto é, para definir objetivos de mais longo prazo, do que tático. Para o apoio a decisões mais "táticas", modelos de sistemas de cultura ou de criação, baseados em outras técnicas de modelagem como, por exemplo, a simulação de sistemas dinâmicos, podem ser mais úteis (Silva Neto & Schneider, 2006).

Para que se possa aplicar a programação matemática para a elaboração de modelos de apoio à decisão junto à agricultores, duas condições são necessárias.

A primeira é que a unidade de produção analisada deve ser adequadamente compreendida dentro do contexto da sua região. Em outras palavras, sempre que analisamos uma unidade de produção agropecuária é necessário conhecer minimamente a realidade da agricultura da região em que ela se situa. E esta necessidade é ainda mais importante quando temos objetivos mais normativos. Isto porque a tentativa de elaborar um de modelo de programação matemática que reflita todos os detalhes de uma unidade de produção (como por exemplo a variação de fertilidade entre as diferentes parcelas de terra, a quantidade exata de mão-de-obra disponível, os índices zootécnicos e o potencial de produção específicos do rebanho bovino) leva a problemas de estimativa dos seus parâmetros muito difíceis de serem resolvidos adequadamente. Assim, o que se deve procurar na formulação de um modelo de programação matemática de um sistema de produção é, em primeiro lugar, que ele reflita a realidade de um determinado tipo de unidade de produção presente em uma região. E é apenas após estarmos assegurados de que o modelo é pertinente à realidade regional é que podemos passar a considerar a situação específica de uma unidade de produção[15].

Outra condição necessária para a formulação de modelos de apoio à decisão é que eles devem refletir critérios de decisão aceitáveis pelos agricultores. Tal condição levanta importantes questões teóricas e conceituais. Se, por um lado, é razoável admitir que os agentes econômicos, e dentre eles os agricultores, tomam suas decisões de forma coerente com os seus interesses, ou seja, que eles são racionais, por outro lado, há uma grande controvérsia sobre como esta racionalidade se reflete efetivamente no comportamento dos agentes econômicos. Assim, dependendo da posição teórica, várias respostas são possíveis a questões como, por exemplo, sob que condições pode-se considerar que uma decisão é racional? O que caracteriza um comportamento racional? As decisões tomadas por um agente econômico racional são totalmente previsíveis?

---

[15] A apresentação de métodos de análise regional da agricultura está muito além do âmbito deste texto. Uma discussão deste tópico, especialmente no que diz respeito ao Estado do Rio Grande do Sul pode ser encontrada em Silva Neto & Basso (2005) e, para uma discussão metodológica mais detalhada ver Prado F^{o}. (19??).

Questões deste tipo são tratadas pela Teoria da Decisão. Portanto, antes de discutirmos a formulação de um modelo que possa levar em consideração os principais critérios de decisão em geral adotados pelos agricultores, é interessante realizarmos uma breve revisão das principais posições teóricas existentes em relação ao processo decisório de agentes econômicos.

6.1. A Teoria Clássica da Decisão

As primeiras concepções sobre o processo de tomada de decisão são agrupadas sob a denominação de Teoria Clássica. Tais concepções consideraram que ao tomar as decisões os agentes econômicos (Sternberg, 2000):

a) possuem todas as informações relevantes sobre as opções disponíveis para a sua decisão e sobre as conseqüências de cada uma destas opções;

b) são infinitamente sensíveis às diferenças entre as opções e,

c) são totalmente racionais na escolha de uma opção.

Como raramente um processo de decisão pode satisfazer todas as condições descritas acima, se admite que esta teoria representa apenas um caso limite. Assim esta abordagem pode ser considerada como um quadro geral, certamente pouco realista, porém útil, para a interpretação do processo de decisão e mesmo para a previsão do comportamento dos agentes econômicos.

Um aspecto interessante da Teoria Clássica da Decisão é a forma como ela aborda o problema da incerteza. Nas decisões sobre investimentos, segundo esta Teoria, uma escolha racional implica o interesse do agente econômico apenas na esperança matemática dos resultados das suas ações (a qual é equivalente ao resultado médio) e não no seu resultado imediato[16]. Esta racionalidade considera que o interesse do agente econômico é simplesmente o de maximizar o resultado econômico o que faz com que, em média, as eventuais perdas no presente sejam perfeitamente compensadas por ganhos futuros. Na prática, isto leva o agente econômico a tratar o problema da escolha da opção que maximiza o seu interesse de forma determinística, sem que sequer seja necessária qualquer avaliação da variabilidade relativa das suas opções, o que facilita grandemente o processo de tomada de decisão (Schrage, 1998).

---

[16] Conforme discutido no capítulo 5, a maximização da esperança matemática só é possível no caso em que a incerteza for distributiva (fraca).

Assim, de acordo com a Teoria Clássica da Decisão, a modelagem de um sistema de produção agropecuária por meio da programação matemática resulta no modelo determinista já descrito no capítulo 2, ou seja,

$$\begin{aligned}&\text{Maximizar } c_i x_i\\&\text{sujeito as restrições}\\&Ax \leq b\\&x \geq 0\end{aligned}$$

onde

$c_i x_i$ = resultado econômico médio c por unidade da atividade x;

A = matriz de coeficientes técnicos e financeiros;

b = vetor linha dos recursos disponíveis.

6.2. A Teoria da Utilidade

A Teoria da Utilidade também advoga uma estrita racionalidade dos agentes econômicos, compartilhando dos mesmos pressupostos da Teoria Clássica. Como será visto adiante, a Teoria Clássica pode ser interpretada como um caso especial da Teoria da Utilidade. A diferença entre ambas reside em que, segundo a Teoria da Utilidade, os agentes econômicos não procuram maximizar os resultados econômicos em si, mas sim a "utilidade" que estes resultados econômicos apresentariam. Como a função que descreve a relação entre utilidade e resultado econômico ("função utilidade") pode não ser linear, do ponto de vista da utilidade, para o tomador de decisão, os ganhos obtidos através da escolha de uma opção que exibe uma esperança matemática mais alta podem não compensar as perdas. Neste caso considera-se que o agente econômico possui aversão ao risco, ou seja, entre escolher uma opção mais arriscada que lhe proporcione maiores resultados médios ou uma opção que proporcione menor resultado médio, porém mais segura, o agente escolheria esta última.

As figuras 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente, exemplos de funções de agentes com aversão, indiferentes e com preferência pelo risco. Na figura 1 observa-se que uma variação simétrica do resultado econômico não apresenta a mesma simetria nas variações das utilidades proporcionadas por tais resultados, sendo que a variação positiva da utilidade é menor do que a variação negativa (ou seja, para Rp - Rm = Rm – Rg, porém Ug - Um < Um - Up). Isto significa que o agente econômico tem uma percepção que atribui um valor maior à perda provável em relação ao valor atribuído ao ganho provável decorrentes de uma decisão que, no longo prazo, lhe proporcionaria um resultado econômico médio. É fácil constatar, pela figura

3, que no caso de um agente com preferência pelo risco a valoração relativa das perdas e dos ganhos prováveis é inversa em relação a um agente com aversão ao risco (para Rp - Rm = Rm – Rg, porém Ug - U > U - Up). Enfim, no caso de um agente indiferente ao risco, representado na figura 2, perdas e ganhos simétricos em relação ao resultado econômico médio, também se mantêm simétricos em relação à utilidade a eles correspondentes (para Rp - Rm = Rm - Rg e Ug - Um = Um - Up).

Formalmente, baseado na programação matemática, um modelo de sistema de produção agropecuária segundo a Teoria da Utilidade pode ser formulado como o modelo descrito no capítulo 4, item 4.3., no qual procura-se maximizar o resultado econômico, assegurada uma certa probabilidade para a sua ocorrência (neste caso 95%):

Max $c + a\,\sigma$

sujeito as restrições

$A\,x \leq b$

$P(a) = 0.95$

$x \geq 0$

onde,

c = resultado econômico esperado

A = matriz de coeficientes técnicos e financeiros;

b = vetor linha dos recursos disponíveis.

a = coeficiente de aversão ao risco do agricultor

σ = desvio padrão do resultado econômico c

P(a) = probabilidade que define o valor de "a"

Segundo este modelo, a aversão ao risco é representada por valores negativos de "a", sendo que valores positivos deste coeficiente determinam uma preferência pelo risco. Se o agricultor é indiferente ao risco o coeficiente "a" é nulo e a função objetivo torna-se idêntica à formulada segundo a Teoria Clássica da Decisão.

Uma questão central para analisar a racionalidade de um agente econômico é entender o que determina a sua aversão, indiferença ou preferência pelo risco. É evidente que, quanto melhor a situação econômica de um produtor, especialmente no que se refere à disponibilidade de reservas financeiras ou de garantias que lhe assegurem acesso a crédito, melhor é a sua condição para enfrentar o risco. O grau de aversão ao risco, portanto, está diretamente relacionado com a situação econômica do produtor (ou seja, com suas condições objetivas).

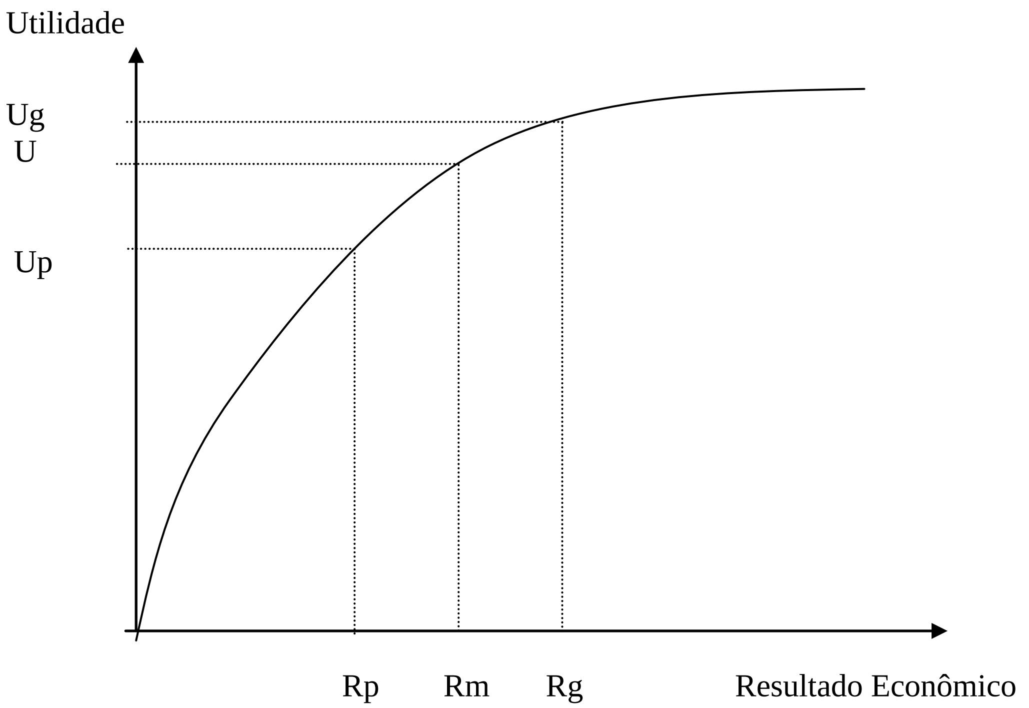


Figura 1 - Função Utilidade com aversão ao risco

Fonte: elaborado pelos autores

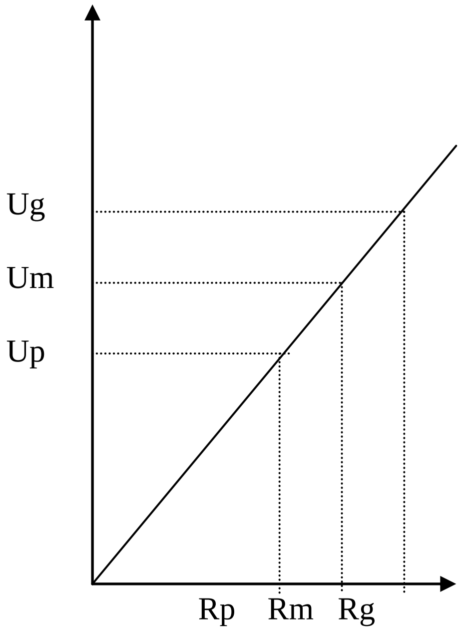


Figura 2 - Função Utilidade com indiferença ao risco

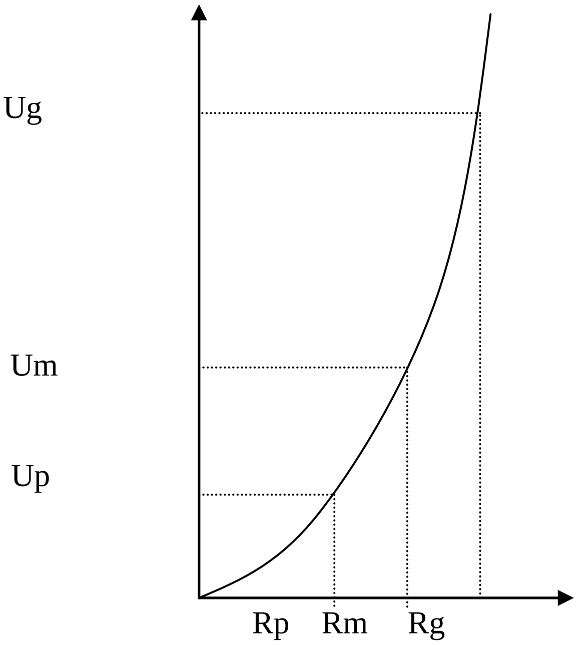


Figura 3 - Função Utilidade com preferência pelo risco

Segundo a Teoria da Utilidade a aversão ao risco é, porém, uma característica essencialmente subjetiva, na medida em que a forma da função utilidade depende da percepção que cada indivíduo possui da realidade. Os agentes econômicos então, embora perfeitamente racionais, fazem suas escolhas a partir de uma visão subjetiva. Por conseqüência, indivíduos defrontados a uma mesma situação podem, cada um, tomar uma decisão diferente dos outros, mesmo sendo estritamente racionais. Entretanto, um mesmo indivíduo defrontado, em momentos distintos, com situações idênticas tomará a mesma decisão. A racionalidade neste caso pode ser afirmada simplesmente porque os agentes tomam suas decisões de forma coerente com os seus interesses. A Teoria da Utilidade, ao contrário da Teoria Clássica, não considera, portanto, a objetividade como um requisito para a racionalidade. Os dados da realidade, não de maneira absoluta, mas como eles são percebidos pelo agente econômico, definem a decisão de um agente econômico.

Um dos aspectos mais criticados da Teoria da Utilidade é o seu pressuposto de que o comportamento racional deve ser entendido como um processo de otimização absoluta, no qual os agentes econômicos dispõem de todas as informações relevantes para a tomada de decisão e sempre são capazes de avaliar “a priori” todas as conseqüências de cada uma das suas possíveis escolhas. Embora este pressuposto seja considerado mais como uma postura metodológica para a construção de modelos formais, sendo o seu irrealismo geralmente admitido abertamente, uma das suas conseqüências mais graves é que ele se fundamenta em agentes econômicos que devem mudar automaticamente (e muitas vezes drasticamente) o seu comportamento a partir de qualquer mudança no ambiente, mesmo aquelas que resultariam em ínfimos aumentos de utilidade (Heiner, 1983). Devido a este tipo de pressuposto, a partir da Teoria da Utilidade é difícil explicar dois aspectos importantes observados no comportamento dos agentes econômicos: a adaptação e a rotina (Possas, 1995). Isto tem levado alguns autores a abandonar o pressuposto da informação perfeita, concentrando-se em demonstrar que os seres humanos tendem a agir de forma estritamente racional a partir dos conhecimentos e informações disponíveis (Schooler e Anderson, 1997) e que a própria mudança progressiva destes conhecimentos e informações caracterizariam o processo de adaptação das pessoas ao seu ambiente. Tal interpretação da Teoria da Utilidade não é, portanto, incompatível com a noção de adaptação. No que diz respeito ao comportamento rotineiro, este poderia ser explicado essencialmente pela ausência de mudanças significativas no ambiente, incluindo-se nisto, no que diz respeito às decisões de investimento, as relações entre os fatores de produção. Um exemplo interessante deste último caso é a conhecida tese sustentada por Schultz (1965) de que os fatores de produção da agricultura latino-americana "tradicional" possuem produtividade marginal nula. Segundo este autor, o que explicaria o comportamento conservador dos agricultores "tradicionais" latino-americanos seriam as suas condições de produção, determinadas pelo esgotamento do potencial econômico das tecnologias "tradicionais" e não uma suposta falta de racionalidade no seu comportamento.

6.3. A Teoria da Racionalidade Limitada

A Teoria da Racionalidade Limitada sustenta que o comportamento racional não pode ser identificado a um processo de otimização, pois os indivíduos ao invés de procurar tomar a decisão que maximizaria a utilidade, ou seja, decisões ótimas, tendem a se contentar com decisões meramente satisfatórias (Simon, 1955). Vários seriam os motivos que levariam as pessoas a agir desta forma. Um dos mais importantes é que, na grande maioria das situações reais, a consideração de todas as opções e a avaliação das conseqüências de cada uma delas de forma suficientemente precisa pode apresentar grandes dificuldades de estimativa, de custo e de processamento. Além disto, mesmo em situações relativamente simples, os indivíduos, independentemente do seu grau de instrução e conhecimento, pelo menos cotidianamente, parecem ter uma grande dificuldade em raciocinar de acordo com as leis de probabilidade.

Assim, foram identificadas várias "heurísticas" (regras mais ou menos *ad hoc*) utilizadas pelos indivíduos para tomar decisões, especialmente as que envolvem probabilidades que, embora desrespeitem os princípios que regeriam uma decisão "racional" (no sentido dado a este termo pela Teoria da Utilidade), constituem-se em regras aparentemente satisfatórias (Kahneman e outros, 1987). Alguns autores chegam a postular que, na medida em que as pessoas não podem apreender a realidade em si, mas apenas certos aspectos desta realidade, o seu raciocínio seria efetuado a partir de "modelos mentais", mais ou menos coerentes com a realidade. Portanto, as decisões tomadas pelas pessoas são diretamente dependentes da forma como elas constroem e modificam estes modelos, sendo que as constantes modificações destes seriam responsáveis pelo comportamento tipicamente adaptativo observado nas pessoas (Johnson-Laird e outros, 1992).

A noção de “satisfação” da Teoria da Racionalidade Limitada pode ser formalizada como:

$$
\begin{aligned}
&c_i' x_i \geq S \\
&Ax \leq b \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

onde

$c'_i x_i$ = resultado econômico c por unidade da atividade x;

S = resultado econômico mínimo a ser obtido;

A = matriz de coeficientes técnicos e financeiros;

b = vetor linha dos recursos disponíveis.

É importante observar que o modelo acima não possui função objetivo, mas apenas uma restrição que determina que o resultado econômico deve ser maior do que um certo limite. Assim, qualquer solução que satisfaça as restrições do modelo pode ser retida, ou seja, o modelo apresenta soluções múltiplas. Porém, de um ponto de vista da Teoria da Racionalidade Limitada, isto não significa a existência de qualquer problema ou contradição no processo de tomada de decisão. Segundo esta teoria a função objetivo que representa o interesse específico do agente econômico pode sequer ser conhecida *a priori* por este, sendo definida ao longo do processo, e não antes, da tomada da decisão (Simon, 2000). Assim, um indivíduo pode decidir sem nem ao menos saber antecipadamente qual agregado econômico ele procura satisfazer, sendo que uma solução não precisa esgotar a disponibilidade de nenhum recurso para que seja considerada satisfatória. Mudanças no ambiente, neste caso, não necessariamente devem levar o indivíduo a alterar a sua decisão. Inversamente, confrontado com o mesmo problema, um indivíduo pode tomar decisões diferentes, dependendo de como ele inicia a análise da situação.

A Racionalidade Limitada tem sido utilizada para a elaboração de um quadro analítico para a incerteza processual[17] (Dosi e Egidi, 1991). Quando um indivíduo é confrontado com um grande número de informações, com muitas inter-relações, a consideração de todas estas informações em seu processo decisório, mesmo que cada uma delas, isoladamente, seja perfeitamente previsível, pode se tornar inviável. Neste caso, devido à dificuldade de processar as variáveis do problema, o indivíduo enfrenta uma incerteza "processual". Embora sem formular explicitamente o conceito de incerteza processual, Heiner (1983) vai além, procurando demonstrar que, se por um lado considerar toda informação relevante é uma condição necessária para se obter uma solução ótima, por outro lado, pode se tornar irracional considerar todas as informações para a solução de um problema, a partir de um certo nível de complexidade, o que torna irracional qualquer tentativa de otimização. Este aparente paradoxo é válido não apenas para informações já disponíveis, mas também em relação a decisões

[17] Discutida no capítulo 5.

relativas à própria coleta dos dados que originam tais informações. Ao obtermos informações sobre uma situação ou fenômeno a partir de um conhecimento muito pequeno dos mesmos, normalmente as primeiras informações tendem a ser as mais elucidativas e as de acesso mais fácil. A medida em que se avança na coleta de dados, as informações obtidas a partir destes tendem a gerar menos conhecimento, tendendo também a ser mais difíceis de ser obtidas.

Assim, há um custo crescente (tanto em termos tempo e trabalho quanto em relação ao conhecimento gerado) e um retorno marginal decrescente (especialmente em termos de conhecimento) na medida em que acumulamos informações sobre um fenômeno ou situação qualquer. Há um momento, portanto, em que o custo marginal de continuar a acumular informações poderá ser superior a utilidade marginal do aumento de conhecimento proporcionado por esta informação, o que tornará irracional a tentativa de obter um conhecimento "perfeito", cuja existência (ou pelo menos a sua procura constante por parte dos indivíduos), é um dos pressupostos fundamentais tanto da Teoria Clássica quanto da Teoria da Utilidade. Portanto, a Teoria da Racionalidade Limitada aponta um paradoxo interessante da noção de racionalidade proposta pelas Teorias Clássica e da Utilidade, na medida em que a tentativa encontrar uma solução ótima pode levar um agente econômico a utilizar as informações de forma irracional, ou seja, a adotar um comportamento que pode ser considerado irracional.

Heiner (1983) sustenta que a incerteza gerada pela diferença entre a competência de um indivíduo em resolver um problema e o grau de dificuldade apresentado por este problema ("competence-difficulty gap" ou "C-D gap" no original) pode ser influenciada pela própria incerteza relativa à imprevisibilidade do comportamento das variáveis do problema, na medida em que esta diminuiria as chances de um indivíduo considerar corretamente as informações no seu processo de decisão. Colocando esta questão nos termos propostos por Dosi e Egidi (1991), a incerteza substantiva pode potencializar fortemente a incerteza processual. Assim, em situações muito mais freqüentes do que normalmente supõe os defensores da Teoria Clássica e da Utilidade, os indivíduos têm poucas razões para adotar um comportamento otimizador. Em muitos casos, afirma ainda Heiner (1983) as chances de sucesso parecem ser maiores se o indivíduo simplesmente adotar as decisões tomadas no passado que proporcionaram os melhores resultados, independentemente das mudanças das condições sob as quais a decisão deve ser tomada. Desta forma, segundo este autor, ambientes em constante mudança, ao diminuir a previsibilidade das variáveis de um problema (gerando assim maior incerteza substantiva e, portanto, processual), tenderiam a contribuir para o surgimento de comportamentos rotineiros que, nestas circunstâncias, podem ser considerados como plenamente racionais, embora não otimizadores.

6.4. As Teorias da decisão e modelos de programação matemática

Esta breve análise de algumas das teorias que procuram explicar a racionalidade humana e suas relações com a incerteza não tem como objetivo evidenciar a superioridade de alguma teoria sobre as demais. Ao contrário, em que pese o caráter polêmico do tema cuja discussão tem gerado posições muitas vezes irredutíveis (Davidson, 1983), entendemos que, dependendo do tipo e do contexto do trabalho a ser efetuado, cada uma das noções discutidas acima pode ser útil para a formulação de modelos de programação.

Evidentemente a satisfação do pressuposto de informação completa e avaliação perfeita das alternativas para a otimização de um sistema de produção é claramente impraticável. Neste sentido, todo modelo de programação matemática, ao considerar sempre informações incompletas, pode ser considerado como tributário da Teoria da Racionalidade Limitada. Por outro lado, a formulação de uma função objetivo explícita e a independência da solução das condições iniciais justifica, até certo ponto, a identificação normalmente realizada entre a programação matemática e a Teoria Clássica, quando se trata de modelos deterministas, e a Teoria da Utilidade, quando se trata de modelos nos quais a incerteza é considerada probabilisticamente.

No entanto, como destacado já na introdução deste capítulo, ao formularmos um modelo de apoio à tomada de decisão, o objetivo não é o de reproduzir fielmente o processo decisório dos agricultores, mais sim o de estabelecer uma referência que possa ser utilizada de forma objetiva para discutir este mesmo processo. Para tanto, tal referência tem que ser construída a partir de critérios que podem ser considerados coerentes com o comportamento do agricultor.

Neste sentido, o modelo foco-perda baseado em cenários pode ser interessante. Como discutido no capítulo 5, neste modelo a maximização do resultado econômico é submetida a uma restrição que define certo nível de segurança para o agricultor diante da incerteza. Além disto, a incerteza neste modelo é considerada por meio de cenários que representam situações concretas, evitando a utilização de probabilidades, cuja utilização em modelos de programação matemática raramente pode ser considerada satisfatória, tanto devido à dificuldades de ordem prática (disponibilidade de dados adequados) quanto de ordem teórica (condições de incerteza forte, especialmente incerteza processual).

O modelo que propomos para ser utilizado de forma mais explícita no apoio à decisão sobre o planejamento de sistemas de produção junto a agricultores é um modelo foco-perda com cenários, no qual o resultado a ser assegurado nas piores condições corresponde ao custo de oportunidade da mão-de-obra familiar dos agricultores. No entanto, como é analisado mais adiante, dependendo das circunstâncias, modelos baseados em outros critérios de decisão podem ser mais úteis, como o modelo de Wald. No exemplo abaixo, discutimos um modelo deste tipo elaborado para ser utilizado junto a agricultores familiares da região noroeste do Rio Grande do Sul.

6.5. Exercício

As regiões originalmente cobertas por florestas do Estado do Rio Grande do Sul caracterizam-se por terem sido ocupadas por imigrantes de origem européia os quais estabeleceram uma agricultura tipicamente familiar. Dentre estas regiões, o noroeste do Estado distingue-se pela forte presença da soja, sendo o trigo a uma cultura de inverno cujos problemas de rentabilidade limita bastante a sua área. A partir do final da década de 1970, com a queda dos subsídios à produção da soja, observa-se um constante aumento da produção de leite que passou a se constituir em uma das principais atividades da região. As atividades descritas abaixo correspondem às alternativas disponíveis para a maior parte das unidades familiares desta região. Por outro lado, os valores indicados para as características destas atividades, como por exemplo, os rendimentos físicos, os custos variáveis, a exigência de mão-de-obra ao longo do ano e o tipo e a qualidade nutricional dos alimentos destinados ao gado leiteiro, representam uma situação específica, dada a alta heterogeneidade das condições sociais e ambientais para a produção agropecuária presentes na região. Por esta razão procuramos o modelo proposto foi formulado de maneira que estes parâmetros possam ser alterados facilmente.

Neste modelo consideramos uma unidade de produção que dispõe de equipamentos suficientes para a o cultivo mecanizado das forrageiras e para a produção comercial de grãos, sendo que o modelo foi formulado de maneira a indicar, inclusive, as vantagens do agricultor possuir ou não uma ensiladeira.

A unidade de produção dispõe de 10 hectares de superfície agrícola útil e 2 unidades de trabalho familiar. A produção de subsistência não foi considerada explicitamente no modelo tendo-se assumido que ela ocuparia uma área fixa na unidade de produção e que, portanto, não estaria sujeita à otimização. Foi considerado que o agricultor dispõe das culturas da soja, do trigo e do milho (que ele pode utilizar para vender os grãos ou para alimentar os animais), além da pecuária leiteira, para compor o seu sistema de produção. O rendimento físico da soja é 40 sacos/hectare, o do trigo de 20 sacos/hectare e o do milho de 50 sacos/hectare. As necessidades de trabalho para a soja são de 4 horas/hectare em abril e 3 horas/hectare em novembro, para o trigo de 3 horas/hectare em outubro e 2 horas/hectare em maio e para o milho de 4 horas/hectare em outubro, 6 horas/hectare em janeiro quando o milho é destinado para silagem e 4 horas/hectare em março, quando o milho é destinado à produção de grãos. As atividades que podem compor o sistema de alimentação do gado leiteiro estão descritas na tabela 1.

Tabela 1.: Rendimento, teores de energia e de proteína, custo e necessidade de trabalho das atividades que podem compor o sistema de criação.

Atividade	Rendimento (kg MS /ha)	Energia (Mcal/kg MS)	Proteína (kg PB/kg MS)	Custo (R$/ha)	Trabalho (horas/mes)
Potreiro	2000	1,7	0,08	10	1 (outubro)
Tífton	5000	1,8	0,15	50	1 (setembro)
Milheto	4000	1,8	0,15	250	2 (setembro)
Sorgo	4000	1,8	0,16	250	2 (agosto)
Aveia	3000	2	0,2	200	2 (abril)
Azevém	3000	2	0,21	100	2 (maio)
Silagem	8000	2	0,06	600	6 (janeiro) 4 (outubro)
Milho	3000	3,3	0,09		
Ração		2,6	0,16	0,6	

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

A distribuição do rendimento das pastagens ao longo do ano [18] é mostrada na tabela 2. Quanto aos preços, normalmente ele é de R$ 0,4/litro para o leite, de R$ 30,00/saco para a soja, de R$ 18,00/saco para o trigo e de R$ 16,00/saco para o milho comercial.

[18] Neste modelo não foram consideradas variações do teor de energia e de proteína das forrageiras ao longo ano.

Tabela 2.: Distribuição do rendimento das pastagens ao longo do ano.

Mês	Potreiro	Tífton	Milheto	Sorgo	Aveia	Azevém
jan	20%	25%	25%	25%		
fev	10%	15%	20%	20%		
mar	7%	10%	10%	10%		
abr	5%	10%	10%	5%		
mai	3%	0%	5%			
jun	2%	0%			20%	
jul	1%	0%			30%	20%
ago	2%	0%			30%	30%
set	10%	5%		5%	20%	35%
out	10%	10%	5%	10%		15%
nov	15%	10%	10%	10%		
dez	15%	15%	15%	15%		
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Para formalizar as possíveis situações de queda no resultado econômico foram elaborados cinco cenários, a saber, de seca no verão, de perdas no inverno (excesso de chuva para as forrageiras e ocorrência de doenças no trigo), de queda no preço da soja, queda do preço do milho e de queda no preço do trigo, além de um cenário para definir o resultado econômico que seria obtido em condições normais de produção (sem perdas). As perdas de rendimento das culturas, em cada cenário, estão descritas na tabela 3. As quedas dos preços consideradas foram de R$ 0,1/litro de leite (25%), de R$ 10/saco de soja (33%), de R$ 6,00/saco de trigo (33%) e de R$ 8,00/saco de milho (37,5%).

Tabela 3.: Perdas de rendimento das forrageiras em cada cenário.

Cenário	Potreiro	Tífton	Milheto	Sorgo	Aveia	Azevém	Silagem	Milho
Seca no verão	50%	30%	70%	70%	-	-	80%	80%
Perdas no inverno	30%	-	-	-	50%	40%	-	-

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

6.5.1. Solução[19]

As principais características do sistema de produção indicado na solução do modelo estão descritas na tabela 4.

Tabela 4.: Sistema de produção indicado na solução.

Variável	Valor
Resultado econômico em condições normais	R$ 16.888
Resultado econômico nas piores situações	R$ 10.400
Produção de leite	64.835 litros/ano
Rendimento leiteiro das vacas	16,4 litros/dia/vaca em lactação
Vacas em lactação	10,9 cabeças
Rebanho (total)	26,2 cabeças
Área de tífton	2,1 hectares
Área de aveia	4,1 hectares
Área de azevém	3,8 hectares
Área de milho para silagem	4,9 hectares
Área de milho-grãos para alimentação dos animais	3,0 hectares
Ração para os animais	8.864 kg/ano

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

A solução do modelo indica que o resultado econômico nas condições normais de produção seria de R$ 16.888,48, sendo o resultado mínimo seria de R$ 10.400. Como este valor corresponde ao custo de oportunidade do trabalho familiar, isto significa que as restrições que descrevem os cenários de perdas limitaram a função objetivo. De fato, a solução obtida indica que o resultado econômico que seria obtido nos cenários de seca no verão, de perdas no inverno e de queda do preço do leite corresponde ao mínimo indicado na função objetivo. Nos demais cenários (queda de preços dos grãos), seria obtido o resultado econômico normal na medida em que a solução não inclui as culturas produtoras de grãos

[19] A formulação completa do modelo encontra-se no anexo 5.

comerciais no sistema de produção. É interessante observar que, segundo a solução do modelo, a unidade de produção geraria uma margem de contribuição de R$ 1.688,84/ha, o que corresponde aproximadamente ao que é comumente observado nas unidades de produção da região com níveis de capitalização semelhantes ao representado no modelo e que tem na produção de leite a sua principal atividade (Silva Neto & Basso, 2005). O mesmo pode-se afirmar em relação ao rendimento leiteiro indicado.

Por outro lado a solução do modelo indica que a unidade de produção deveria se especializar na produção de leite, o que é relativamente raro na região. Além disto, a grande maioria das unidades de produção com áreas próximas de 10 hectares e que desenvolvem a atividade leiteira na região são menos capitalizadas (não produzindo silagem, por exemplo), obtendo resultados econômicos bastante inferiores ao indicado pela solução do modelo (Silva Neto & Basso, 2004). Nestas unidades de produção menos capitalizadas a cultura da soja é a principal atividade.

Assim, efetuamos novas simulações. Na primeira delas a possibilidade da produção de silagem foi excluída. Na segunda simulação a bovinocultura de leite foi excluída como alternativa de produção, restando apenas as opções relacionadas à produção de grãos. Nestes casos foi constatado que com uma área de 10 hectares não é mais possível obter, nos piores cenários, uma remuneração das duas unidades de trabalho disponíveis equivalente ao seu custo de oportunidade. Por esta razão, o modelo foco-perda foi reformulado em um modelo de Wald, ou seja, a função objetivo foi alterada de forma que o resultado mínimo fosse maximizado e a restrição que condicionava o resultado mínimo foi neutralizada (para que este possa atingir um valor o mais próximo possível do custo de oportunidade da mão-de-obra).

Os resultados obtidos podem ser observados na tabela 5, os quais são, de maneira geral, semelhantes aos que são observados nas unidades de produção descapitalizadas e que dispõe de superfícies pequenas da região noroeste do Rio Grande do Sul, exceto no que diz respeito à área de trigo, cultura pouco praticada por este tipo de unidade de produção (Silva Neto & Basso, 2005). Outra diferença importante é o alto rendimento leiteiro indicado pela solução do modelo completo, sendo os valores observados muito mais baixos neste tipo de unidade de produção[20]. De qualquer forma, a solução do modelo completo indica claramente a grande dependência destas unidades de produção em relação à produção de grãos, além de uma produção de leite em baixa escala (apenas cerca de 37 litros/dia). A comparação da

[20] Nenhuma restrição relativa ao potencial de rendimento das vacas foi incluída no modelo.

solução do modelo completo com a do modelo sem leite indica que a bovinocultura de leite agrega pouca renda em condições normais de produção. Porém nos piores cenários o resultado econômico indicado pela solução do modelo completo é cerca de R$ 2.500,00 superior ao indicado pela solução do modelo sem leite. Portanto, as simulações indicam que a importância da produção de leite neste tipo de unidade de produção pode estar mais relacionada à sua estabilidade econômica do que simplesmente ao nível absoluto da renda. Tais resultados evidenciam claramente os limites de uma avaliação econômica baseada apenas em resultados médios (ou esperados em condições normais).

Tabela 5.: Sistema de produção indicado pela solução do modelo de Wald, com exclusão da silagem.

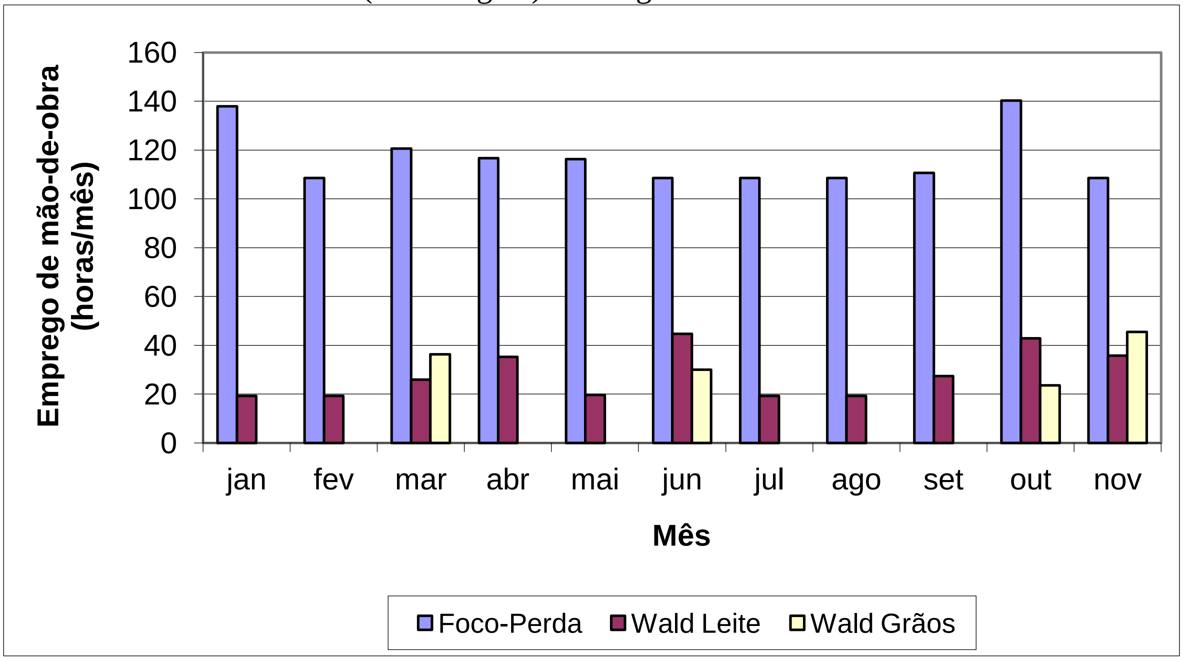
Variável	Modelo completo	Modelo sem leite
Resultado econômico em condições normais	R$ 7.255	R$ 7.009
Resultado econômico nas piores situações	R$ 5.815	R$ 3.300
Área de soja	3,5 hectares	9,1 hectares
Área de trigo	8,47 hectares	10 hectares
Área de milho para venda dos grãos	0,35 hectare	0,9 hectare
Produção de leite	14.400 litros/ano	--
Rendimento leiteiro das vacas	18,8 litros/vaca em lactação/dia	--
Vacas em lactação	2,1 cabeças	--
Rebanho (total)	5 cabeças	--
Área de milheto	4,3 hectares	
Área de aveia	1,5 hectares	
Área de azevém	0,2 hectares	
Área de milho-grãos para alimentação dos animais	1,8 hectares	

Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Mesmo se considerarmos que este tipo de unidade de produção dispõe de uma certa renda adicional gerada pela produção de subsistência (que se situa entre R$ 500 e R$ 1.000), a situação econômica destes agricultores pode ser considerada bastante precária, pois mesmo em condições normais de produção a remuneração do trabalho estaria abaixo do seu custo de oportunidade, o que explica, em grande parte, o fato deles não conseguirem investir na produção de leite. Neste sentido a solução do modelo indica a grande importância de ações que possibilitassem que estes agricultores produzissem silagem.

Um dos fatores mais importantes a ser levados em consideração quando se pretende propor modificações em um sistema de produção diz respeito ao trabalho. O emprego de mão-de-obra ao longo do ano indicado pela solução dos três modelos é mostrado na figura 1.

Figura 1.: Emprego de mão-de-obra indicado pela solução do modelo Foco-Perda e pelos modelos de Wald com leite (sem silagem) e com grãos.



Fonte: Dados de pesquisa, 2006.

Assim, embora em nenhuma solução o emprego da mão-de-obra atinja o limite de 416 horas mensais disponíveis, o sistema de produção indicado pelo modelo foco-perda exige muito mais mão-de-obra do que a solução indicada pelo modelo de Wald com leite, no qual a silagem é excluída como opção de produção de forragem e, especialmente, pelo modelo de Wald com grãos (no qual a atividade leiteira foi excluída como opção). Os resultados mostrados na figura 1 mostram claramente o baixo emprego de mão-de-obra exigido por sistemas de produção baseados em grãos (parcial ou exclusivamente) em pequenas propriedades. Isto, aliado à baixa renda auferida nestas unidades de produção, explica porque que este tipo de agricultor muitas vezes procura complementar sua renda empregando-se fora da sua unidade de produção, o que torna ainda mais difícil a reestruturação dos seus sistemas de produção no sentido de um aumento da produção de leite.

Enfim é interessante observar que embora as simulações indiquem que a promoção da produção de silagem e do aumento do potencial de rendimento leiteiro dos animais pode desempenhar um importante papel na promoção da atividade leiteira da região junto aos agricultores menos capitalizados, isto não significa a promoção de sistemas de criação altamente intensivos, como os baseados no confinamento dos animais. Ao contrário, a solução do modelo foco-perda indica um sistema de criação no qual as pastagens são responsáveis por uma grande parte da alimentação dos animais, sendo que a silagem, os grãos de milho e a ração fontes de alimentos especialmente importantes para a regularização da disponibilidade de alimentos ao longo do ano.

6.6. O uso da programação matemática em modelos de apoio à decisão junto a agricultores

Na breve discussão realizada neste capítulo procuramos discutir as potencialidades da programação matemática para a elaboração de modelos de apoio à decisão de agricultores. Esperamos que tenha ficado claro que tal uso da programação, apesar da sua finalidade normativa, não significa abandonar o caráter essencialmente analítico que temos defendido no uso desta técnica de modelagem. Assim, em nenhum momento sugeriu-se aqui que os agricultores devessem adotar diretamente alguma das soluções indicadas pelos modelos. Ao contrário, estas serviram principalmente como uma referência para explicar a lógica do funcionamento dos sistemas de produção, a partir das quais é então possível inferir em qual sentido tais sistemas poderiam ser modificados vantajosamente.

Tal postura, de grande prudência, encontra respaldo nas dificuldades de se compreender teoricamente o processo de tomada de decisão de agentes econômicos, salientada nos itens iniciais do capítulo. De fato, por um lado os pressupostos extremamente restritivos assumidos pelas Teorias Clássica e da Utilidade permitem que estas sejam consideradas apenas como casos limite, os quais, embora úteis, dificilmente podem oferecer uma explicação satisfatória para o comportamento efetivamente observado dos agricultores. Por outro lado, pode-se considerar uma incoerência lógica qualquer tentativa de utilizar métodos de otimização, como a programação matemática, baseados na Teoria da Racionalidade Limitada, embora esta ofereça explicações bastante plausíveis para o comportamento observado de agentes econômicos. Neste sentido, o ponto forte do uso da programação matemática na análise de sistemas de produção agropecuária, a possibilidade de testar o conhecimento do modelador de forma quantitativa e (razoavelmente) objetiva, é perdido.

A solução apresentada neste capítulo para este problema foi a adoção de critérios de tomada de decisão não probabilísticos que consideram as fontes de incerteza de forma explícita, procurando-se assegurar um resultado econômico nas piores situações que possa ser considerado suficiente pelos agricultores. A explicitação das fontes de incerteza, formalizadas por meio de cenários, também se justifica pela facilidade que ela pode proporcionar à interpretação dos resultados obtidos, especialmente junto aos agricultores. Assim, as soluções dos modelos elaborados indicam o resultado econômico que seria obtido em cada cenário, representativo de uma situação relacionada à fontes específicas de incerteza (secas, quedas de preço, etc.). Isto deve facilitar, por exemplo, a um agricultor julgar a pertinência das soluções obtidas em relação a sua realidade, o que é uma forma de validação de grande importância para o uso dos modelos como ferramenta de apoio à decisão.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na introdução deste texto salientamos que modelos de programação matemática são representações forçosamente simplificadas da realidade, na medida em que o objetivo da sua elaboração não é o de representá-la fielmente, mas sim contribuir para analisar o que é essencial para a sua compreensão.

A guisa de conclusão, após ter discutido a elaboração de diversos tipos de modelos, desde aplicações bastante simples até formulações relativamente sofisticadas, é interessante retomarmos a discussão efetuada na introdução deste texto a qual, também desta vez, pode ser levantada por meio de algumas questões como: Afinal, que tipo de conhecimento pode ser gerado por meio de modelos de sistemas de produção, baseados na programação matemática? Para que serve tal tipo de conhecimento?

Lévy (1993), ao discutir as conseqüências da generalização do uso de meios eletrônicos de armazenamento, processamento e comunicação de informações sobre os processos de geração de conhecimento, defende a idéia da emergência de um "conhecimento por simulação". Tal conhecimento, segundo o autor é fundamentalmente distinto do "conhecimento circular", produto da utilização da comunicação oral e de recursos puramente mentais para o armazenamento e processamento de informações, característicos das sociedades que não haviam desenvolvido a escrita e do que o autor denomina de "conhecimento linear", produto da utilização de recursos baseados na escrita. Assim, segundo esse autor, a simulação computacional, ao permitir uma interação muito maior com o "objeto" analisado (representado no modelo matemático de simulação), tem gerado um novo tipo de conhecimento. E o que fundamentalmente distingue este conhecimento dos demais é que ele já não se baseia no mito (como nas sociedades sem escrita) ou no texto (como nas sociedades históricas), os quais podem apenas ser interpretados ou lidos, mas que oferecem poucas oportunidades para serem manipulados (ou "explorados", segundo o autor). E nesse processo de exploração do conhecimento formalizado no modelo (ou seja, no processo de simulação) a operacionalidade do modelo, entendida como a facilidade com que ele pode ser manipulado, é muitas vezes tão ou mais importante do que a sua capacidade de representar a realidade (Lévy, 1993).

Esse "conhecimento por simulação" parece ser precisamente o tipo de conhecimento gerado a partir da abordagem da modelagem de sistemas de produção por meio da programação matemática aqui proposta. E, concordando com Levy (1993), também entendemos que este tipo de conhecimento deverá desempenhar um papel extremamente importante para o desenvolvimento da agricultura. Como indica claramente Mazoyer & Roudart (1998), os aumentos de rendimentos físicos provocados pela aplicação de insumos e equipamentos de origem industrial, característica da agricultura contemporânea, já há algum tempo não têm sido suficientes para compensar os seus custos de forma generalizada, como no passado. Isto têm contribuído, inclusive, para uma retomada do interesse em formas de agricultura baseadas em princípios mais ecológicos, porém de aplicação mais complexa. De qualquer forma, independentemente da sua forma (convencional ou alternativa) o desenvolvimento da agricultura atualmente exige processos de alocação de recursos muito mais refinados.

A programação matemática pode desempenhar um papel importante neste desenvolvimento, de várias formas.

No ensino de ciências agrárias a programação matemática pode ser um meio interessante para os estudantes aprenderem, de forma clara e bastante "concreta", sobre como funciona um sistema de produção, e quais são os limites, teóricos e práticos, que se colocam para a sua análise.

Para os diversos tipos de profissionais diretamente envolvidos com a promoção do desenvolvimento da agricultura (extensionistas e prestadores de serviços em geral), a programação matemática pode ser um meio interessante de delimitar as potencialidades dos sistemas de produção, permitindo estabelecer uma base objetiva (que atualmente parece se constituir em uma carência importante) ao diálogo do técnico com os agricultores.

Enfim, a programação matemática pode ser uma ferramenta importante para o avanço da pesquisa sobre sistemas de produção, na medida em que ela permite testar globalmente a coerência do conhecimento disponível sobre os mesmos.

Para concluir salientamos, como Levy (1993), que os novos meios de processamento de informações têm provocado um impacto significativo sobre a geração de conhecimento na sociedade contemporânea. Nossa convicção é que a programação matemática representa um meio para os técnicos e pesquisadores relacionados ao desenvolvimento da agricultura se inserirem neste processo. Nós nos sentiríamos recompensados caso este texto tenha contribuído para tornar realizável esta convicção.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andrade, L. E. de; Introdução à Pesquisa Operacional. Rio de Janeiro. LTC, 1990. 277 p.

Chiang, A. Matemática para Economistas. São Paulo, Ed. da Universidade de São Paulo e Ed. McGraw-Hill, 1982, 684 p.

Davidson, P. Rational expectations: a fallacious foundation for studying crucial decision-making processes. *Journal of Post Keynesian Economics.* 5(2):182-197, inverno 1983.

Dosi, G. e Egidi, M. Substantive and procedural uncertainty: An exploration of economic behaviours in changing environments. Evolutionary Economics (1):145-168, 1991.

Garcia F^{o}, D. P.; Guia Metodológico - Diagnóstico de Sistemas Agrários. Brasília, INCRA/FAO, 1999 (disponível em http://www.incra.gov.br/fao/, acessado em 19 de junho de 2006).

Hazell, P.B.R.Game Theory: An Extension of its Application to Farm Planning Under Uncertainty. *Journal of Agricultural Economics*, 1970.

Heiner, R. A. The Origin of Predictable Behavior. *American Economic Review*, 73 (4):560-595, 1983.

Hoffmann, R.; Engler, J.J. de C.; Serrano, O.; Thame, A. C. de M.; Neves, E.M.; Administração da Empresa Agrícola, Biblioteca de Ciências sociais, Série Estudos Agrícolas, Livraria Pioneira Editora, São Paulo, 1978.

Johnson-Laird, P.N., Byrne, R. M.J. e Schaeken, W. Proposional reasoning by model. *Psychological Review*, 99(3):418-439, 1992.

Kahneman, D., Slovic, P. e Tversky, A. *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

Knight, F. H., Risk, Uncertainty, and Profit. Edição original de 1921, disponível em Library of Economics and Liberty, www.econlib.org/library/Knight/, acessado em 13 de janeiro de 2005.

Levy, P. *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Rio de Janeiro, Editora 34, 1993.

LINGO: the modeling language and optimizer, user´s guide. LINDO Systems Inc., Chicago, 1998.

Mazoyer, M. & Roudart, L. *Histoire des agricultures du monde: du néolithique à la contemporaine*. Paris: Seuil, 1998.

N. R. C. *National Research Council, Nutrients Requirements of Dairy Cattle*, 6th. Revised Edition, National Academy Press, Washington, 1989.

Perrings C. (1991), <<Reserved Rationality and the Precautionary Principle: Technological Change, Time and Uncertainty in Environmental Decision Making>>, in Costanza R. (ed.), *Ecological Economics: The Science and Management of Sustainability*, Columbia University Press, Nova Iorque.

Possas, S. Notas acerca da racionalidade econômica. *Economia e Sociedade*, (5):181-187, dez. 1995.

Prigogine, I. The End of Uncertainty.

Puccini, Abelardo de L.; Pizzolato, Nelio D. *Programação Linear*. Rio de Janeiro; São Paulo: LTC, 1987. 927 p

Schrage, L. *Optimization Modeling with LINGO*. LINDO Systems Inc., Chicago, 1998.

Schultz, T. *A Transformação da Agricultura Tradicional*. Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1965.

Scooler, L. J. e Anderson, J. R. The Role of Process in the Rational Analysis of Memory. *Cognitive Psychology*, (32):219-250, 1997.

SILVA NETO, Benedito; BASSO, David. Aplicação da Teoria dos Sistemas Agrários para a análise da agricultura do Rio Grande do Sul. In: SILVA NETO, Benedito; BASSO, David. (Org.). *Sistemas Agrários do Rio Grande do Sul. Análise e Recomendações de Políticas.* Ijuí, 2005, v.1, p.17-23.

SILVA NETO, Benedito; SCHNEIDER, Mariane. Modelo de simulação de sistema de pastejo rotativo e contínuo de azevém (Lolium multiflorum LAM.) na bovinocultura. *Ciência Rural*, Santa Maria, v.36, n. 4,2006.

Simon, H. A. A Behavioral Model of Rational Choice. *The Quarterly Journal of Economics*, (59):99-118, fevereiro 1955.

Simon, H. A. Bounded Rationality in Social Science: Today and Tomorrow. *Mind & Society*, (1):25-39, 2000.

Sternberg, R. J. *Psicologia Cognitiva*. Artes Médicas, Porto Alegre, 2000.

ANEXOS

Anexo 1

```
!SISTEMA DE PRODUÇÃO DO NOROESTE DO RS;
MAX = 400*SOJA + 50*TRIGO + 0.4*LEITE + 1.1*PV*VD - 20*VL - 10*VS - 15*T -
5*N - 10*POT - 50*CEL - 250*MT - 250*SOR - 200*AV - 100*AZ - 0.6*R - 600*MSIL;

!PARAMETROS DE ENTRADA;
RVLVT = 0.7; !(vacas lactacao/total vacas);
MORT = 0.03; !(animais mortos/total rebanho/ano);
[REND_POTREIRO] RENDPOT = 2000; !(kg MS/ha);
[REND_CAPIM_ELEFANTE] RENDCEL = 5000; !(kg MS/ha);
[REND_MILHETO] RENDMT = 4000; !(kg MS/ha);
[REND_SORGO] RENDSO = 4000; !(kg MS/ha);
[REND_AVEIA] RENDAV = 3000; !(kg MS/ha);
[REND_AZEVEM] RENDAZ = 3000; !(kg MS/ha);
[REND_MILHO_SILAGEM] RENDMSIL = 8000; !(kg MS/ha);
[ENERGIA_POTREIRO] EPOT = 1.7; !(Mcal/kg MS);
[ENERGIA_CAPIM_ELEFANTE] ECEL = 1.8; !(Mcal/kg MS);
[ENERGIA_MILHETO] EMT = 1.8; !(Mcal/kg MS);
[ENERGIA_SORGO] ESO = 1.8; !(Mcal/kg MS);
[ENERGIA_AVEIA] EAV = 2; !(Mcal/kg MS);
[ENERGIA_AZEVEM] EAZ = 2; !(Mcal/kg MS);
[ENERGIA_RACAO] ENRAC = 3; !(Mcal/kg MS);
[ENERGIA_MILHO_SILAGEM] ENSIL = 2; !(Mcal/kg MS);
[PESO_INICIAL] PNASC = 50; !(kg);
[PESO_VACA] PV = 500; !(kg);
[CAPAC_INGESTAO_MS] CID = 0.03; !(kg MS/kg animal/dia);
[SUPERF_AGRIC_UTIL] SAU = 50; !(ha);
[TRAB_FAMILIAR] WF = 416; !(horas/mes);

!SUPERFICIE AGRICOLA UTIL;

[SAU_VERAO] SOJA + POT + CEL + MT + SOR + AV + MSIL <= SAU;
[SAU_INVERNO] TRIGO + POT + CEL + AV + AZ <= SAU;

!RESTRICOES DE TRABALHO;

[TRAB_FAMILIAR_JAN] 10*VL + 6*MSIL <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_FEV] 10*VL <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_MAR] 10*VL <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_ABR] 10*VL + 2*AV + 4*SOJA <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_MAI] 10*VL + 2*AZ + 2*TRIGO <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_JUN] 10*VL <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_JUL] 10*VL <= WF;
```

```
[TRAB_FAMILIAR_AGO] 10*VL + 2*SOR <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_SET] 10*VL + 2*MT +  CEL <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_OUT] 10*VL + POT + 4*MSIL + 3*TRIGO <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_NOV] 10*VL + 3*SOJA <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_DEZ] 10*VL <= WF;


!ENERGIA PARA VACAS EM LACTACAO;

[EVL1]1.15*L1+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT1*POMTL1-
ECEL*RENDCEL1*CELVL1-EMT*RENDMT1*MTVL1-ESO*RENDSO1*SOVL1-
EAV*RENDAV1*AVVL1-EAZ*RENDAZ1*TIMTL1-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL1-
ENRAC*RVL1<=0;
[EVL2]1.15*L2+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT2*POMTL2-
ECEL*RENDCEL2*CELVL2-EMT*RENDMT2*MTVL2-ESO*RENDSO2*SOVL2-
EAV*RENDAV2*AVVL2 - EAZ*RENDAZ2*TIMTL2-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL2-
ENRAC*RVL2 <=0;
[EVL3]1.15*L3+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT3*POMTL3-
ECEL*RENDCEL3*CELVL3-EMT*RENDMT3*MTVL3-ESO*RENDSO3*SOVL3-
EAV*RENDAV3*AVVL3 - EAZ*RENDAZ3*TIMTL3-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL3-
ENRAC*RVL3 <=0;
[EVL4]1.15*L4+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT4*POMTL4-
ECEL*RENDCEL4*CELVL4-EMT*RENDMT4*MTVL4- ESO*RENDSO4*SOVL4-
EAV*RENDAV4*AVVL4 - EAZ*RENDAZ4*TIMTL4-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL4-
ENRAC*RVL4 <=0;
[EVL5]1.15*L5+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT5*POMTL5-
ECEL*RENDCEL5*CELVL5-EMT*RENDMT5*MTVL5-ESO*RENDSO5*SOVL5-
EAV*RENDAV5*AVVL5 - EAZ*RENDAZ5*TIMTL5-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL5-
ENRAC*RVL5 <=0;
[EVL6]1.15*L6+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT6*POMTL6-
ECEL*RENDCEL6*CELVL6-EMT*RENDMT6*MTVL6-ESO*RENDSO6*SOVL6-
EAV*RENDAV6*AVVL6-EAZ*RENDAZ6*TIMTL6-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL6-
ENRAC*RVL6 <=0;
[EVL7]1.15*L7+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT7*POMTL7-
ECEL*RENDCEL7*CELVL7-EMT*RENDMT7*MTVL7-ESO*RENDSO7*SOVL7-
EAV*RENDAV7*AVVL7-EAZ*RENDAZ7*TIMTL7-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL7-
ENRAC*RVL7 <=0;
[EVL8]1.15*L8+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT8*POMTL8-
ECEL*RENDCEL8*CELVL8-EMT*RENDMT8*MTVL8-ESO*RENDSO8*SOVL8-
EAV*RENDAV8*AVVL8-EAZ*RENDAZ8*TIMTL8-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL8-
ENRAC*RVL8 <=0;
[EVL9]1.15*L9+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT9*POMTL9-
ECEL*RENDCEL9*CELVL9-EMT*RENDMT9*MTVL9-ESO*RENDSO9*SOVL9-
EAV*RENDAV9*AVVL9-EAZ*RENDAZ9*TIMTL9-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL9-
ENRAC*RVL9 <=0;
[EVL10]1.15*L10+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT10*POMTL10-
ECEL*RENDCEL10*CELVL10-EMT*RENDMT10*MTVL10-
ESO*RENDSO10*SOVL10-EAV*RENDAV10*AVVL10-EAZ*RENDAZ10*TIMTL10-
ENSIL*RENDMSIL*MSILVL10-ENRAC*RVL10<=0;
```

[EVL11]1.15*L11+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT11*POMTL11-
ECEL*RENDCEL11*CELVL11-EMT*RENDMT11*MTVL11-
ESO*RENDSO11*SOVL11-EAV*RENDAV11*AVVL10-EAZ*RENDAZ11*TIMTL11-
ENSIL*RENDMSIL*MSILVL11-ENRAC*RVL11<=0;
[EVL12]1.15*L12+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT12*POMTL12-
ECEL*RENDCEL12*CELVL12-EMT*RENDMT12*MTVL12-
ESO*RENDSO12*SOVL12-EAV*RENDAV12*AVVL10-EAZ*RENDAZ12*TIMTL12-
ENSIL*RENDMSIL*MSILVL12-ENRAC*RVL12<=0;

!ENERGIA PARA O REBANHO (ANIMAIS NAO PRODUTIVOS);

[EREB1]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT1*POTREB1-
ECEL*RENDCEL1*CELREB1-EMT*RENDMT1*MTREB1-ESO*RENDSO1*SOREB1-
EAV*RENDAV1*AVREB1-EAZ*RENDAZ1*AZREB1-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB1-
ENRAC*RREB1<=0;
[EREB2]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT2*POTREB2-
ECEL*RENDCEL2*CELREB2-EMT*RENDMT2*MTREB2-ESO*RENDSO2*SOREB2-
EAV*RENDAV2*AVREB2 - EAZ*RENDAZ2*AZREB2-
ENSIL*RENDMSIL*MSILREB2-ENRAC*RREB2 <=0;
[EREB3]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT3*POTREB3-
ECEL*RENDCEL3*CELREB3-EMT*RENDMT3*MTREB3-ESO*RENDSO3*SOREB3-
EAV*RENDAV3*AVREB3 - EAZ*RENDAZ3*AZREB3-
ENSIL*RENDMSIL*MSILREB3-ENRAC*RREB3 <=0;
[EREB4]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT4*POTREB4-
ECEL*RENDCEL4*CELREB4-EMT*RENDMT4*MTREB4- ESO*RENDSO4*SOREB4-
EAV*RENDAV4*AVREB4 - EAZ*RENDAZ4*AZREB4-
ENSIL*RENDMSIL*MSILREB4-ENRAC*RREB4 <=0;
[EREB5]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT5*POTREB5-
ECEL*RENDCEL5*CELREB5-EMT*RENDMT5*MTREB5-ESO*RENDSO5*SOREB5-
EAV*RENDAV5*AVREB5 - EAZ*RENDAZ5*AZREB5-
ENSIL*RENDMSIL*MSILREB5-ENRAC*RREB5 <=0;
[EREB6]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT6*POTREB6-
ECEL*RENDCEL6*CELREB6-EMT*RENDMT6*MTREB6-ESO*RENDSO6*SOREB6-
EAV*RENDAV6*AVREB6-EAZ*RENDAZ6*AZREB6-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB6-
ENRAC*RREB6 <=0;
[EREB7]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT7*POTREB7-
ECEL*RENDCEL7*CELREB7-EMT*RENDMT7*MTREB7-ESO*RENDSO7*SOREB7-
EAV*RENDAV7*AVREB7-EAZ*RENDAZ7*AZREB7-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB7-
ENRAC*RREB7 <=0;
[EREB8]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT8*POTREB8-
ECEL*RENDCEL8*CELREB8-EMT*RENDMT8*MTREB8-ESO*RENDSO8*SOREB8-
EAV*RENDAV8*AVREB8-EAZ*RENDAZ8*AZREB8-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB8-
ENRAC*RREB8 <=0;
[EREB9]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT9*POTREB9-
ECEL*RENDCEL9*CELREB9-EMT*RENDMT9*MTREB9-ESO*RENDSO9*SOREB9-
EAV*RENDAV9*AVREB9-EAZ*RENDAZ9*AZREB9-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB9-
ENRAC*RREB9 <=0;
[EREB10]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT10*POTREB10-
ECEL*RENDCEL10*CELREB10-ESO*RENDSO10*SOREB10-

EMT*RENDMT10*MTREB10-EAV*RENDAV10*AVREB10-
EAZ*RENDAZ10*AZREB10-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB10-ENRAC*RREB10<=0;
[EREB11]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT11*POTREB11-
ECEL*RENDCEL11*CELREB11-ESO*RENDSO11*SOREB11-
EMT*RENDMT11*MTREB11-EAV*RENDAV11*AVREB11-
EAZ*RENDAZ11*AZREB11-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB11-ENRAC*RREB11<=0;
[EREB12]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT12*POTREB12-
ECEL*RENDCEL12*CELREB12-ESO*RENDSO12*SOREB12-
EMT*RENDMT12*MTREB12-EAV*RENDAV12*AVREB12-
EAZ*RENDAZ12*AZREB12-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB12-ENRAC*RREB12<=0;

!INGESTAO DAS VACAS EM LACTACAO;

[IVL1] CING*PV*VL-RENDPOT1*POMTL1-RENDCEL1*CELVL1-
RENDMT1*MTVL1-RENDAV1*AVVL1-RENDSO1*SOVL1-RENDAZ1*TIMTL1-
RENDMSIL*MSILVL1-RVL1>=0;
[IVL2] CING*PV*VL-RENDPOT2*POMTL2-RENDCEL2*CELVL2-
RENDMT2*MTVL2-RENDAV2*AVVL2 -RENDSO2*SOVL2- RENDAZ2*TIMTL2-
RENDMSIL*MSILVL2-RVL2 >=0;
[IVL3] CING*PV*VL-RENDPOT3*POMTL3-RENDCEL3*CELVL3-
RENDMT3*MTVL3-RENDAV3*AVVL3 -RENDSO3*SOVL3- RENDAZ3*TIMTL3-
RENDMSIL*MSILVL3-RVL3 >=0;
[IVL4] CING*PV*VL-RENDPOT4*POMTL4-RENDCEL4*CELVL4-
RENDMT4*MTVL4- RENDAV4*AVVL4 -RENDSO4*SOVL4- RENDAZ4*TIMTL4-
RENDMSIL*MSILVL4-RVL4 >=0;
[IVL5] CING*PV*VL-RENDPOT5*POMTL5-RENDCEL5*CELVL5-
RENDMT5*MTVL5-RENDAV5*AVVL5 -RENDSO5*SOVL5- RENDAZ5*TIMTL5-
RENDMSIL*MSILVL5-RVL5 >=0;
[IVL6] CING*PV*VL-RENDPOT6*POMTL6-RENDCEL6*CELVL6-
RENDMT6*MTVL6-RENDAV6*AVVL6-RENDSO6*SOVL6-RENDAZ6*TIMTL6-
RENDMSIL*MSILVL6-RVL6 >=0;
[IVL7] CING*PV*VL-RENDPOT7*POMTL7-RENDCEL7*CELVL7-
RENDMT7*MTVL7-RENDAV7*AVVL7-RENDSO7*SOVL7-RENDAZ7*TIMTL7-
RENDMSIL*MSILVL7-RVL7 >=0;
[IVL8] CING*PV*VL-RENDPOT8*POMTL8-RENDCEL8*CELVL8-
RENDMT8*MTVL8-RENDAV8*AVVL8-RENDSO8*SOVL8-RENDAZ8*TIMTL8-
RENDMSIL*MSILVL8-RVL8 >=0;
[IVL9] CING*PV*VL-RENDPOT9*POMTL9-RENDCEL9*CELVL9-
RENDMT9*MTVL9-RENDAV9*AVVL9-RENDSO9*SOVL9-RENDAZ9*TIMTL9-
RENDMSIL*MSILVL9-RVL9 >=0;
[IVL10] CING*PV*VL-RENDPOT10*POMTL10-RENDCEL10*CELVL10-
RENDMT10*MTVL10-RENDAV10*AVVL10-RENDSO10*SOVL10-
RENDAZ10*TIMTL10-RENDMSIL*MSILVL10-RVL10>=0;
[IVL11] CING*PV*VL-RENDPOT11*POMTL11-RENDCEL11*CELVL11-
RENDMT11*MTVL11-RENDAV11*AVVL11-RENDSO11*SOVL11-
RENDAZ11*TIMTL11-RENDMSIL*MSILVL11-RVL11>=0;
[IVL12] CING*PV*VL-RENDPOT12*POMTL12-RENDCEL12*CELVL12-
RENDMT12*MTVL12-RENDAV12*AVVL12-RENDSO12*SOVL12-
RENDAZ12*TIMTL12-RENDMSIL*MSILVL12-RVL12>=0;

!INGESTAO DO REBANHO (ANIMAIS NAO PRODUTIVOS);

[IREB1] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT1*POTREB1-RENDCEL1*CELREB1-RENDSO1*SOREB1-RENDMT1*MTREB1-RENDAV1*AVREB1-RENDAZ1*AZREB1-RENDMSIL*MSILREB1-RREB1>=0;
[IREB2] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT2*POTREB2-RENDCEL2*CELREB2-RENDSO2*SOREB2-RENDMT2*MTREB2-RENDAV2*AVREB2 - RENDAZ2*AZREB2-RENDMSIL*MSILREB2-RREB2 >=0;
[IREB3] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT3*POTREB3-RENDCEL3*CELREB3-RENDSO3*SOREB3-RENDMT3*MTREB3-RENDAV3*AVREB3 - RENDAZ3*AZREB3-RENDMSIL*MSILREB3-RREB3 >=0;
[IREB4] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT4*POTREB4-RENDCEL4*CELREB4-RENDSO4*SOREB4-RENDMT4*MTREB4-RENDAV4*AVREB4 - RENDAZ4*AZREB4-RENDMSIL*MSILREB4-RREB4 >=0;
[IREB5] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT5*POTREB5-RENDCEL5*CELREB5-RENDSO5*SOREB5-RENDMT5*MTREB5-RENDAV5*AVREB5 - RENDAZ5*AZREB5-RENDMSIL*MSILREB5-RREB5 >=0;
[IREB6] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT6*POTREB6-RENDCEL6*CELREB6-RENDSO6*SOREB6-RENDMT6*MTREB6-RENDAV6*AVREB6-RENDAZ6*AZREB6-RENDMSIL*MSILREB6-RREB6 >=0;
[IREB7] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT7*POTREB7-RENDCEL7*CELREB7-RENDSO7*SOREB7-RENDMT7*MTREB7-RENDAV7*AVREB7-RENDAZ7*AZREB7-RENDMSIL*MSILREB7-RREB7 >=0;
[IREB8] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT8*POTREB8-RENDCEL8*CELREB8-RENDSO8*SOREB8-RENDMT8*MTREB8-RENDAV8*AVREB8-RENDAZ8*AZREB8-RENDMSIL*MSILREB8-RREB8 >=0;
[IREB9] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT9*POTREB9-RENDCEL9*CELREB9-RENDSO9*SOREB9-RENDMT9*MTREB9-RENDAV9*AVREB9-RENDAZ9*AZREB9-RENDMSIL*MSILREB9-RREB9 >=0;
[IREB10] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT10*POTREB10-RENDCEL10*CELREB10-RENDSO10*SOREB10-RENDMT10*MTREB10-RENDAV10*AVREB10-RENDAZ10*AZREB10-RENDMSIL*MSILREB10-RREB10>=0;
[IREB11] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT11*POTREB11-RENDCEL11*CELREB11-RENDSO11*SOREB11-RENDMT11*MTREB11-RENDAV11*AVREB11-RENDAZ11*AZREB11-RENDMSIL*MSILREB11-RREB11>=0;
[IREB12] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT12*POTREB12-RENDCEL12*CELREB12-RENDSO12*SOREB12-RENDMT12*MTREB12-RENDAV12*AVREB12-RENDAZ12*AZREB12-RENDMSIL*MSILREB12-RREB12>=0;

!INGESTAO DE VOLUMOSOS DAS VACAS EM LACTACAO;

[VOLVL1] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT1*POMTL1-RENDCEL1*CELVL1-RENDMT1*MTVL1-RENDAV1*AVVL1-RENDMSIL*MSILVL1-RENDAZ1*TIMTL1-RENDSO1*SOVL1 <=0;
[VOLVL2] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT2*POMTL2-RENDCEL2*CELVL2-RENDMT2*MTVL2-RENDAV2*AVVL2-RENDMSIL*MSILVL2 - RENDAZ2*TIMTL2-RENDSO2*SOVL2 <=0;

[VOLVL3] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT3*POMTL3-RENDCEL3*CELVL3-RENDMT3*MTVL3-RENDAV3*AVVL3-RENDMSIL*MSILVL3 - RENDAZ3*TIMTL3-RENDSO3*SOVL3 <=0;
[VOLVL4] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT4*POMTL4-RENDCEL4*CELVL4-RENDMT4*MTVL4- RENDAV4*AVVL4-RENDMSIL*MSILVL4 - RENDAZ4*TIMTL4-RENDSO4*SOVL4 <=0;
[VOLVL5] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT5*POMTL5-RENDCEL5*CELVL5-RENDMT5*MTVL5-RENDAV5*AVVL5-RENDMSIL*MSILVL5 - RENDAZ5*TIMTL5-RENDSO5*SOVL5 <=0;
[VOLVL6] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT6*POMTL6-RENDCEL6*CELVL6-RENDMT6*MTVL6-RENDAV6*AVVL6-RENDMSIL*MSILVL6-RENDAZ6*TIMTL6-RENDSO6*SOVL6 <=0;
[VOLVL7] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT7*POMTL7-RENDCEL7*CELVL7-RENDMT7*MTVL7-RENDAV7*AVVL7-RENDMSIL*MSILVL7-RENDAZ7*TIMTL7-RENDSO7*SOVL7 <=0;
[VOLVL8] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT8*POMTL8-RENDCEL8*CELVL8-RENDMT8*MTVL8-RENDAV8*AVVL8-RENDMSIL*MSILVL8-RENDAZ8*TIMTL8-RENDSO8*SOVL8 <=0;
[VOLVL9] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT9*POMTL9-RENDCEL9*CELVL9-RENDMT9*MTVL9-RENDAV9*AVVL9-RENDMSIL*MSILVL9-RENDAZ9*TIMTL9-RENDSO9*SOVL9 <=0;
[VOLVL10] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT10*POMTL10-RENDCEL10*CELVL10-RENDMT10*MTVL10-RENDMSIL*MSILVL10-RENDAV10*AVVL10-RENDAZ10*TIMTL10-RENDSO10*SOVL10 <=0;
[VOLVL11] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT11*POMTL11-RENDCEL11*CELVL11-RENDMT11*MTVL11-RENDMSIL*MSILVL11-RENDAV11*AVVL11-RENDAZ11*TIMTL11-RENDSO11*SOVL11 <=0;
[VOLVL12] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT12*POMTL12-RENDCEL12*CELVL12-RENDMT12*MTVL12-RENDMSIL*MSILVL12-RENDAV12*AVVL12-RENDAZ12*TIMTL12-RENDSO12*SOVL12 <=0;

!INGESTAO DE VOLUMOSOS DO REBANHO (ANIMAIS NAO PRODUTIVOS);

[VOLREB1] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-RENDPOT1*POTREB1-RENDCEL1*CELREB1-RENDMT1*MTREB1-RENDAV1*AVREB1-RENDMSIL*MSILREB1-RENDAZ1*AZREB1-RENDSO1*SOREB1 <=0;

[VOLREB2] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-RENDPOT2*POTREB2-RENDCEL2*CELREB2-RENDMT2*MTREB2-RENDAV2*AVREB2-RENDMSIL*MSILREB2 - RENDAZ2*AZREB2-RENDSO2*SOREB2 <=0;

[VOLREB3] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-RENDPOT3*POTREB3-RENDCEL3*CELREB3-RENDMT3*MTREB3-RENDAV3*AVREB3-RENDMSIL*MSILREB3 - RENDAZ3*AZREB3-RENDSO3*SOREB3 <=0;
[VOLREB4] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-RENDPOT4*POTREB4-RENDCEL4*CELREB4-RENDMT4*MTREB4-

RENDAV4*AVREB4-RENDMSIL*MSILREB4 - RENDAZ4*AZREB4-
RENDSO4*SOREB4 <=0;
[VOLREB5] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT5*POTREB5-RENDCEL5*CELREB5-RENDMT5*MTREB5-
RENDAV5*AVREB5-RENDMSIL*MSILREB5 - RENDAZ5*AZREB5-
RENDSO5*SOREB5 <=0;
[VOLREB6] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT6*POTREB6-RENDCEL6*CELREB6-RENDMT6*MTREB6-
RENDAV6*AVREB6-RENDMSIL*MSILREB6-RENDAZ6*AZREB6-
RENDSO6*SOREB6 <=0;
[VOLREB7] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT7*POTREB7-RENDCEL7*CELREB7-RENDMT7*MTREB7-
RENDAV7*AVREB7-RENDMSIL*MSILREB7-RENDAZ7*AZREB7-
RENDSO7*SOREB7 <=0;
[VOLREB8] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT8*POTREB8-RENDCEL8*CELREB8-RENDMT8*MTREB8-
RENDAV8*AVREB8-RENDMSIL*MSILREB8-RENDAZ8*AZREB8-
RENDSO8*SOREB8 <=0;
[VOLREB9] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT9*POTREB9-RENDCEL9*CELREB9-RENDMT9*MTREB9-
RENDAV9*AVREB9-RENDMSIL*MSILREB9-RENDAZ9*AZREB9-
RENDSO9*SOREB9 <=0;
[VOLREB10] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT10*POTREB10-RENDCEL10*CELREB10-RENDMT10*MTREB10-
RENDAV10*AVREB10-RENDMSIL*MSILREB10-RENDAZ10*AZREB10-
RENDSO10*SOREB10 <=0;
[VOLREB11] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT11*POTREB11-RENDCEL11*CELREB11-RENDMT11*MTREB11-
RENDAV11*AVREB11-RENDMSIL*MSILREB11-RENDAZ11*AZREB11-
RENDSO11*SOREB11 <=0;
[VOLREB12] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT12*POTREB12-RENDCEL12*CELREB12-RENDMT12*MTREB12-
RENDAV12*AVREB12-RENDMSIL*MSILREB12-RENDAZ12*AZREB12-
RENDSO12*SOREB12 <=0;

! LIGACAO PASTAGENS MENSAIS E ANUAL;

! POTREIRO;
[POT1] POMTL1 + POTREB1 - POT <= 0;
[POT2] POMTL2 + POTREB2 - POT <= 0;
[POT3] POMTL3 + POTREB3 - POT <= 0;
[POT4] POMTL4 + POTREB4 - POT <= 0;
[POT5] POMTL5 + POTREB5 - POT <= 0;
[POT6] POMTL6 + POTREB6 - POT <= 0;
[POT7] POMTL7 + POTREB7 - POT <= 0;
[POT8] POMTL8 + POTREB8 - POT <= 0;
[POT9] POMTL9 + POTREB9 - POT <= 0;
[POT10] POMTL10 + POTREB10 - POT <= 0;
[POT11] POMTL11 + POTREB11 - POT <= 0;

```
[POT112] POMTL12 + POTREB12 - POT <= 0;

! CAPIM ELEFANTE;
[CEL1] CELVL1 + CELREB1 - CEL <= 0;
[CEL2] CELVL2 + CELREB2 - CEL <= 0;
[CEL3] CELVL3 + CELREB3 - CEL <= 0;
[CEL4] CELVL4 + CELREB4 - CEL <= 0;
[CEL5] CELVL5 + CELREB5 - CEL <= 0;
[CEL6] CELVL6 + CELREB6 - CEL <= 0;
[CEL7] CELVL7 + CELREB7 - CEL <= 0;
[CEL8] CELVL8 + CELREB8 - CEL <= 0;
[CEL9] CELVL9 + CELREB9 - CEL <= 0;
[CEL10] CELVL10 + CELREB10 - CEL <= 0;
[CEL11] CELVL11 + CELREB11 - CEL <= 0;
[CEL12] CELVL12 + CELREB12 - CEL <= 0;

! MILHETO;
[MT1] MTVL1 + MTREB1 - MT <= 0;
[MT2] MTVL2 + MTREB2 - MT <= 0;
[MT3] MTVL3 + MTREB3 - MT <= 0;
[MT4] MTVL4 + MTREB4 - MT <= 0;
[MT5] MTVL5 + MTREB5 - MT <= 0;
[MT6] MTVL6 + MTREB6 - MT <= 0;
[MT7] MTVL7 + MTREB7 - MT <= 0;
[MT8] MTVL8 + MTREB8 - MT <= 0;
[MT9] MTVL9 + MTREB9 - MT <= 0;
[MT10] MTVL10 + MTREB10 - MT <= 0;
[MT11] MTVL11 + MTREB11 - MT <= 0;
[MT12] MTVL12 + MTREB12 - MT <= 0;

! SORGO;
[SO1] SOVL1 + SOREB1 - SOR <= 0;
[SO2] SOVL2 + SOREB2 - SOR <= 0;
[SO3] SOVL3 + SOREB3 - SOR <= 0;
[SO4] SOVL4 + SOREB4 - SOR <= 0;
[SO5] SOVL5 + SOREB5 - SOR <= 0;
[SO6] SOVL6 + SOREB6 - SOR <= 0;
[SO7] SOVL7 + SOREB7 - SOR <= 0;
[SO8] SOVL8 + SOREB8 - SOR <= 0;
[SO9] SOVL9 + SOREB9 - SOR <= 0;
[SO10] SOVL10 + SOREB10 - SOR <= 0;
[SO11] SOVL11 + SOREB11 - SOR <= 0;
[SO12] SOVL12 + SOREB12 - SOR <= 0;

! AVEIA;
[AV1] AVVL1 + AVREB1 - AV <= 0;
[AV2] AVVL2 + AVREB2 - AV <= 0;
[AV3] AVVL3 + AVREB3 - AV <= 0;
[AV4] AVVL4 + AVREB4 - AV <= 0;
```

```
[AV5] AVVL5 + AVREB5 - AV <= 0;
[AV6] AVVL6 + AVREB6 - AV <= 0;
[AV7] AVVL7 + AVREB7 - AV <= 0;
[AV8] AVVL8 + AVREB8 - AV <= 0;
[AV9] AVVL9 + AVREB9 - AV <= 0;
[AV10] AVVL10 + AVREB10 - AV <= 0;
[AV11] AVVL11 + AVREB11 - AV <= 0;
[AV12] AVVL12 + AVREB12 - AV <= 0;

! AZEVEM;
[AZ1] TIMTL1 + AZREB1 - AZ <= 0;
[AZ2] TIMTL2 + AZREB2 - AZ <= 0;
[AZ3] TIMTL3 + AZREB3 - AZ <= 0;
[AZ4] TIMTL4 + AZREB4 - AZ <= 0;
[AZ5] TIMTL5 + AZREB5 - AZ <= 0;
[AZ6] TIMTL6 + AZREB6 - AZ <= 0;
[AZ7] TIMTL7 + AZREB7 - AZ <= 0;
[AZ8] TIMTL8 + AZREB8 - AZ <= 0;
[AZ9] TIMTL9 + AZREB9 - AZ <= 0;
[AZ10] TIMTL10 + AZREB10 - AZ <= 0;
[AZ11] TIMTL11 + AZREB11 - AZ <= 0;
[AZ12] TIMTL12 + AZREB12 - AZ <= 0;

!LIGACAO RACAO MENSAL E ANUAL;

!RACAO VACAS EM LACTACAO;
[LRVL] RVL1 + RVL2 + RVL3 + RVL4 + RVL5 + RVL6 + RVL7 + RVL8 + RVL9 +
RVL10 + RVL11 + RVL12 - RVL = 0;

!RACAO REBANHO;
[LRREB] RREB1 + RREB2 + RREB3 + RREB4 + RREB5 + RREB6 + RREB7 + RREB8 +
RREB9 + RREB10 + RREB11 + RREB12 - RREB = 0;

!RACAO TOTAL;
[RTOT] RVL + RREB = R;

!LIGACAO SILAGEM MENSAL E ANUAL;

[SVL] MSILVL1 + MSILVL2 + MSILVL3 + MSILVL4 + MSILVL5 + MSILVL6 +
MSILVL7 + MSILVL8 + MSILVL9 + MSILVL10 + MSILVL11 + MSILVL12 = MSILVL;

[SREB] MSILREB1 + MSILREB2 + MSILREB3 + MSILREB4 + MSILREB5 + MSILREB6
+ MSILREB7 + MSILREB8 + MSILREB9 + MSILREB10 + MSILREB11 + MSILREB12 =
MSILREB;

[MSILT] MSILVL + MSILREB = MSIL;

!LIGACAO LEITE MENSAL E ANUAL;
```

```
[LEIT] LEITE= L1 + L2 + L3 + L4 + L5 + L6 + L7 + L8 + L9 + L10 + L11 + L12;

! LIGACAO ENTRE AS CATEGORIAS DO REBANHO;

[VLVS] (1-RVLVT)*VL - RVLVT*VS <= 0;
[VLT] 0.5*VL - T <= 0;
[VLN] 0.5*(1-MORT)*VL - N <= 0;
[VLVD] VD - 0.4*VL <= 0;

! RENDIMENTO DAS PASTAGENS;

!POTREIRO;
[RPOT1] RENDPOT1 = .2*RENDPOT;
[RPOT2] RENDPOT2 = .1*RENDPOT;
[RPOT3] RENDPOT3 = .07*RENDPOT;
[RPOT4] RENDPOT4 = .05*RENDPOT;
[RPOT5] RENDPOT5 = .03*RENDPOT;
[RPOT6] RENDPOT6 = .02*RENDPOT;
[RPOT7] RENDPOT7 = .01*RENDPOT;
[RPOT8] RENDPOT8 = .02*RENDPOT;
[RPOT9] RENDPOT9 = .1*RENDPOT;
[RPOT10] RENDPOT10 = .1*RENDPOT;
[RPOT11] RENDPOT11 = .15*RENDPOT;
[RPOT12] RENDPOT12 = .15*RENDPOT;

!CAPIM ELEFANTE;
[RCEL1] RENDCEL1 = .25*RENDCEL;
[RCEL2] RENDCEL2 = .15*RENDCEL;
[RCEL3] RENDCEL3 = .1*RENDCEL;
[RCEL4] RENDCEL4 = .1*RENDCEL;
[RCEL5] RENDCEL5 = 0*RENDCEL;
[RCEL6] RENDCEL6 = 0*RENDCEL;
[RCEL7] RENDCEL7 = 0*RENDCEL;
[RCEL8] RENDCEL8 = 0*RENDCEL;
[RCEL9] RENDCEL9 = .05*RENDCEL;
[RCEL10] RENDCEL10 = .1*RENDCEL;
[RCEL11] RENDCEL11 = .1*RENDCEL;
[RCEL12] RENDCEL12 = .15*RENDCEL;

!MILHETO;
[RMT1] RENDMT1 = .25*RENDMT;
[RMT2] RENDMT2 = .2*RENDMT;
[RMT3] RENDMT3 = .1*RENDMT;
[RMT4] RENDMT4 = .1*RENDMT;
[RMT5] RENDMT5 = .05*RENDMT;
[RMT6] RENDMT6 = 0*RENDMT;
[RMT7] RENDMT7 = 0*RENDMT;
[RMT8] RENDMT8 = 0*RENDMT;
[RMT9] RENDMT9 = 0*RENDMT;
```

```
[RMT10] RENDMT10 = .05*RENDMT;
[RMT11] RENDMT11 = .1*RENDMT;
[RMT12] RENDMT12 = .15*RENDSO;

!SORGO;
[RSO1] RENDSO1 = .25*RENDSO;
[RSO2] RENDSO2 = .2*RENDSO;
[RSO3] RENDSO3 = .1*RENDSO;
[RSO4] RENDSO4 = .05*RENDSO;
[RSO5] RENDSO5 = 0*RENDSO;
[RSO6] RENDSO6 = 0*RENDSO;
[RSO7] RENDSO7 = 0*RENDSO;
[RSO8] RENDSO8 = 0*RENDSO;
[RSO9] RENDSO9 = .05*RENDSO;
[RSO10] RENDSO10 = .1*RENDSO;
[RSO11] RENDSO11 = .1*RENDSO;
[RSO12] RENDSO12 = .15*RENDSO;

!AVEIA;
[RAV1] RENDAV1 = 0*RENDAV;
[RAV2] RENDAV2 = 0*RENDAV;
[RAV3] RENDAV3 = 0*RENDAV;
[RAV4] RENDAV4 = 0*RENDAV;
[RAV5] RENDAV5 = 0*RENDAV;
[RAV6] RENDAV6 = .2*RENDAV;
[RAV7] RENDAV7 = .3*RENDAV;
[RAV8] RENDAV8 = .3*RENDAV;
[RAV9] RENDAV9 = .2*RENDAV;
[RAV10] RENDAV10 = 0*RENDAV;
[RAV11] RENDAV11 = 0*RENDAV;
[RAV12] RENDAV12 = 0*RENDAV;

!AZEVEM;
[RAZ1] RENDAZ1 = 0*RENDAZ;
[RAZ2] RENDAZ2 = 0*RENDAZ;
[RAZ3] RENDAZ3 = 0*RENDAZ;
[RAZ4] RENDAZ4 = 0*RENDAZ;
[RAZ5] RENDAZ5 = 0*RENDAZ;
[RAZ6] RENDAZ6 = 0*RENDAZ;
[RAZ7] RENDAZ7 = .2*RENDAZ;
[RAZ8] RENDAZ8 = .3*RENDAZ;
[RAZ9] RENDAZ9 = .35*RENDAZ;
[RAZ10] RENDAZ10 = .15*RENDAZ;
[RAZ11] RENDAZ11 = 0*RENDAZ;
[RAZ12] RENDAZ12 = 0*RENDAZ;

!PESO ANIMAIS;
[PTER] PTERN = ((PV-PNASC)/(2*365))*(365/2);
[PNOVI] PNOV = ((PV-PNASC)/(2*365))*(365*1.5);
```

```
!INGESTAO/PV;
[CINGMS] CING = CID*30;

!NECESSIDADE DE ENERGIA DOS ANIMAIS;

[NECEVL] NECVL = (0.02134*PV+3.502)*30;
[NECET] NECT = (0.041366*PTERN+3.108333)*30;
[NECEN] NECN = (0.041366*PNOV+3.108333)*30;
[NECEVS] NECVS = NECVL*1.2;
```

Anexo 2

```
!OTIMIZACAO DA PRODUCAO DE LEITE – CRITÉRIO DE WALD COM CENARIOS;

MAX = MIN;

!CENARIO DE PERDA NO VERAO;
[CVER] 0.4*LEITE + 1.1*PV*VD - 20*VL - 10*VS - 15*T - 5*N - 10*POT - 50*CEL -
250*MT - 250*SOR - 200*AV - 100*AZ - 0.6*R - 600*MSIL -(0.4 * (PLPOTV + PLCEL +
PLMT + PLSOR + ((ENSIL*RENDMSIL)/1.15)*MSILVLVER*PASIL)) - MIN >= 0;

!CENARIO DE PERDA NO INVERNO;
[CINV]0.4*LEITE + 1.1*PV*VD - 20*VL - 10*VS - 15*T - 5*N - 10*POT - 50*CEL -
250*MT - 250*SOR - 200*AV - 100*AZ - 0.6*R - 600*MSIL  - (0.4 * (PLPOTI + PLAV +
PLAZ + (16000/1.15)*MSILVLINV*PASIL)) - MIN >= 0;

!CENARIO DE PERDA NO PRECO DO LEITE;
[CPL] 0.4*LEITE*PPLEITE + 1.1*PV*VD - 20*VL - 10*VS - 15*T - 5*N - 10*POT -
50*CEL - 250*MT - 250*SOR - 200*AV - 100*AZ - 0.6*R - 600*MSIL - MIN >= 0;

!CENARIO SEM PERDAS;
[CSP] 0.4*LEITE + 1.1*PV*VD - 20*VL - 10*VS - 15*T - 5*N - 10*POT - 50*CEL -
250*MT - 250*SOR - 200*AV - 100*AZ - 0.6*R - 600*MSIL = CEN;

!PERDAS APARENTES;
[PPAPOTV] PAPOTV = 0.5;
[PPAPOTI] PAPOTI = 0.3;
[PPACEL] PACEL = 0.7;
[PPAMT] PAMT = 0.7;
[PPASOR] PASOR = 0.6;
[PPAAV] PAAV = 0.5;
[PPAZ] PAAZ = 0.4;
[PPAMSIL] PASIL = 0.8;

!PERDAS NOS PRECOS;
[PPL] PPLEITE = 0.8;


!PARAMETROS DE ENTRADA;
RVLVT = 0.7; !(vacas lactacao/total vacas);
MORT = 0.03; !(animais mortos/total rebanho/ano);
!CRIA = 2 ANOS;
[REND_POTREIRO] RENDPOT = 2000; !(kg MS/ha);
[REND_CAPIM_ELEFANTE] RENDCEL = 5000; !(kg MS/ha);
[REND_MILHETO] RENDMT = 4000; !(kg MS/ha);
[REND_SORGO] RENDSO = 4000; !(kg MS/ha);
[REND_AVEIA] RENDAV = 3000; !(kg MS/ha);
[REND_AZEVEM] RENDAZ = 3000; !(kg MS/ha);
```

```
[REND_MILHO_SILAGEM] RENDMSIL = 8000; !(kg MS/ha);
[ENERGIA_POTREIRO] EPOT = 1.7; !(Mcal/kg MS);
[ENERGIA_CAPIM_ELEFANTE] ECEL = 1.8; !(Mcal/kg MS);
[ENERGIA_MILHETO] EMT = 1.8; !(Mcal/kg MS);
[ENERGIA_SORGO] ESO = 1.8; !(Mcal/kg MS);
[ENERGIA_AVEIA] EAV = 2; !(Mcal/kg MS);
[ENERGIA_AZEVEM] EAZ = 2; !(Mcal/kg MS);
[ENERGIA_RACAO] ENRAC = 3; !(Mcal/kg MS);
[ENERGIA_MILHO_SILAGEM] ENSIL = 2; !(Mcal/kg MS);
[PESO_INICIAL] PNASC = 50; !(kg);
[PESO_VACA] PV = 500; !(kg);
[CAPAC_INGESTAO_MS] CID = 0.03; !(kg MS/kg animal/dia);
[SUPERF_AGRIC_UTIL] SAU = 50; !(ha);
[TRAB_FAMILIAR] WF = 416; !(horas/mes);

!SUPERFICIE AGRICOLA UTIL;

[SAU_VERAO] POT + CEL + MT + SOR + MSIL <= SAU;
[SAU_INVERNO] POT + CEL + AV + AZ <= SAU;

!RESTRICOES DE TRABALHO;

[TRAB_FAMILIAR_JAN] 10*VL + 6*MSIL <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_FEV] 10*VL <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_MAR] 10*VL <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_ABR] 10*VL + 2*AV <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_MAI] 10*VL + 2*AZ <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_JUN] 10*VL <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_JUL] 10*VL <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_AGO] 10*VL + 2*SOR <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_SET] 10*VL + 2*MT + CEL <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_OUT] 10*VL + POT + 4*MSIL <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_NOV] 10*VL <= WF;
[TRAB_FAMILIAR_DEZ] 10*VL <= WF;


!ENERGIA PARA VACAS EM LACTACAO;

[EVL1]1.15*L1+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT1*POMTL1-
ECEL*RENDCEL1*CELVL1-EMT*RENDMT1*MTVL1-ESO*RENDSO1*SOVL1-
EAV*RENDAV1*AVVL1-EAZ*RENDAZ1*TIMTL1-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL1-
ENRAC*RVL1<=0;
[EVL2]1.15*L2+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT2*POMTL2-
ECEL*RENDCEL2*CELVL2-EMT*RENDMT2*MTVL2-ESO*RENDSO2*SOVL2-
EAV*RENDAV2*AVVL2 - EAZ*RENDAZ2*TIMTL2-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL2-
ENRAC*RVL2 <=0;
[EVL3]1.15*L3+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT3*POMTL3-
ECEL*RENDCEL3*CELVL3-EMT*RENDMT3*MTVL3-ESO*RENDSO3*SOVL3-
```

EAV*RENDAV3*AVVL3 - EAZ*RENDAZ3*TIMTL3-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL3-
ENRAC*RVL3 <=0;
[EVL4]1.15*L4+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT4*POMTL4-
ECEL*RENDCEL4*CELVL4-EMT*RENDMT4*MTVL4- ESO*RENDSO4*SOVL4-
EAV*RENDAV4*AVVL4 - EAZ*RENDAZ4*TIMTL4-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL4-
ENRAC*RVL4 <=0;
[EVL5]1.15*L5+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT5*POMTL5-
ECEL*RENDCEL5*CELVL5-EMT*RENDMT5*MTVL5-ESO*RENDSO5*SOVL5-
EAV*RENDAV5*AVVL5 - EAZ*RENDAZ5*TIMTL5-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL5-
ENRAC*RVL5 <=0;
[EVL6]1.15*L6+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT6*POMTL6-
ECEL*RENDCEL6*CELVL6-EMT*RENDMT6*MTVL6-ESO*RENDSO6*SOVL6-
EAV*RENDAV6*AVVL6-EAZ*RENDAZ6*TIMTL6-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL6-
ENRAC*RVL6 <=0;
[EVL7]1.15*L7+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT7*POMTL7-
ECEL*RENDCEL7*CELVL7-EMT*RENDMT7*MTVL7-ESO*RENDSO7*SOVL7-
EAV*RENDAV7*AVVL7-EAZ*RENDAZ7*TIMTL7-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL7-
ENRAC*RVL7 <=0;
[EVL8]1.15*L8+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT8*POMTL8-
ECEL*RENDCEL8*CELVL8-EMT*RENDMT8*MTVL8-ESO*RENDSO8*SOVL8-
EAV*RENDAV8*AVVL8-EAZ*RENDAZ8*TIMTL8-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL8-
ENRAC*RVL8 <=0;
[EVL9]1.15*L9+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT9*POMTL9-
ECEL*RENDCEL9*CELVL9-EMT*RENDMT9*MTVL9-ESO*RENDSO9*SOVL9-
EAV*RENDAV9*AVVL9-EAZ*RENDAZ9*TIMTL9-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL9-
ENRAC*RVL9 <=0;
[EVL10]1.15*L10+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT10*POMTL10-
ECEL*RENDCEL10*CELVL10-EMT*RENDMT10*MTVL10-
ESO*RENDSO10*SOVL10-EAV*RENDAV10*AVVL10-EAZ*RENDAZ10*TIMTL10-
ENSIL*RENDMSIL*MSILVL10-ENRAC*RVL10<=0;
[EVL11]1.15*L11+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT11*POMTL11-
ECEL*RENDCEL11*CELVL11-EMT*RENDMT11*MTVL11-
ESO*RENDSO11*SOVL11-EAV*RENDAV11*AVVL10-EAZ*RENDAZ11*TIMTL11-
ENSIL*RENDMSIL*MSILVL11-ENRAC*RVL11<=0;
[EVL12]1.15*L12+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT12*POMTL12-
ECEL*RENDCEL12*CELVL12-EMT*RENDMT12*MTVL12-
ESO*RENDSO12*SOVL12-EAV*RENDAV12*AVVL10-EAZ*RENDAZ12*TIMTL12-
ENSIL*RENDMSIL*MSILVL12-ENRAC*RVL12<=0;

!ENERGIA PARA O REBANHO (ANIMAIS NAO PRODUTIVOS);

[EREB1]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT1*POTREB1-
ECEL*RENDCEL1*CELREB1-EMT*RENDMT1*MTREB1-ESO*RENDSO1*SOREB1-
EAV*RENDAV1*AVREB1-EAZ*RENDAZ1*AZREB1-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB1-
ENRAC*RREB1<=0;
[EREB2]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT2*POTREB2-
ECEL*RENDCEL2*CELREB2-EMT*RENDMT2*MTREB2-ESO*RENDSO2*SOREB2-
EAV*RENDAV2*AVREB2 - EAZ*RENDAZ2*AZREB2-
ENSIL*RENDMSIL*MSILREB2-ENRAC*RREB2 <=0;

```
[EREB3]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT3*POTREB3-
ECEL*RENDCEL3*CELREB3-EMT*RENDMT3*MTREB3-ESO*RENDSO3*SOREB3-
EAV*RENDAV3*AVREB3 - EAZ*RENDAZ3*AZREB3-
ENSIL*RENDMSIL*MSILREB3-ENRAC*RREB3 <=0;
[EREB4]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT4*POTREB4-
ECEL*RENDCEL4*CELREB4-EMT*RENDMT4*MTREB4- ESO*RENDSO4*SOREB4-
EAV*RENDAV4*AVREB4 - EAZ*RENDAZ4*AZREB4-
ENSIL*RENDMSIL*MSILREB4-ENRAC*RREB4 <=0;
[EREB5]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT5*POTREB5-
ECEL*RENDCEL5*CELREB5-EMT*RENDMT5*MTREB5-ESO*RENDSO5*SOREB5-
EAV*RENDAV5*AVREB5 - EAZ*RENDAZ5*AZREB5-
ENSIL*RENDMSIL*MSILREB5-ENRAC*RREB5 <=0;
[EREB6]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT6*POTREB6-
ECEL*RENDCEL6*CELREB6-EMT*RENDMT6*MTREB6-ESO*RENDSO6*SOREB6-
EAV*RENDAV6*AVREB6-EAZ*RENDAZ6*AZREB6-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB6-
ENRAC*RREB6 <=0;
[EREB7]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT7*POTREB7-
ECEL*RENDCEL7*CELREB7-EMT*RENDMT7*MTREB7-ESO*RENDSO7*SOREB7-
EAV*RENDAV7*AVREB7-EAZ*RENDAZ7*AZREB7-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB7-
ENRAC*RREB7 <=0;
[EREB8]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT8*POTREB8-
ECEL*RENDCEL8*CELREB8-EMT*RENDMT8*MTREB8-ESO*RENDSO8*SOREB8-
EAV*RENDAV8*AVREB8-EAZ*RENDAZ8*AZREB8-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB8-
ENRAC*RREB8 <=0;
[EREB9]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT9*POTREB9-
ECEL*RENDCEL9*CELREB9-EMT*RENDMT9*MTREB9-ESO*RENDSO9*SOREB9-
EAV*RENDAV9*AVREB9-EAZ*RENDAZ9*AZREB9-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB9-
ENRAC*RREB9 <=0;
[EREB10]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT10*POTREB10-
ECEL*RENDCEL10*CELREB10-ESO*RENDSO10*SOREB10-
EMT*RENDMT10*MTREB10-EAV*RENDAV10*AVREB10-
EAZ*RENDAZ10*AZREB10-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB10-ENRAC*RREB10<=0;
[EREB11]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT11*POTREB11-
ECEL*RENDCEL11*CELREB11-ESO*RENDSO11*SOREB11-
EMT*RENDMT11*MTREB11-EAV*RENDAV11*AVREB11-
EAZ*RENDAZ11*AZREB11-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB11-ENRAC*RREB11<=0;
[EREB12]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT12*POTREB12-
ECEL*RENDCEL12*CELREB12-ESO*RENDSO12*SOREB12-
EMT*RENDMT12*MTREB12-EAV*RENDAV12*AVREB12-
EAZ*RENDAZ12*AZREB12-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB12-ENRAC*RREB12<=0;

!INGESTAO DAS VACAS EM LACTACAO;

[IVL1] CING*PV*VL-RENDPOT1*POMTL1-RENDCEL1*CELVL1-
RENDMT1*MTVL1-RENDAV1*AVVL1-RENDSO1*SOVL1-RENDAZ1*TIMTL1-
RENDMSIL*MSILVL1-RVL1>=0;
[IVL2] CING*PV*VL-RENDPOT2*POMTL2-RENDCEL2*CELVL2-
RENDMT2*MTVL2-RENDAV2*AVVL2 -RENDSO2*SOVL2- RENDAZ2*TIMTL2-
RENDMSIL*MSILVL2-RVL2 >=0;
```

[IVL3] CING*PV*VL-RENDPOT3*POMTL3-RENDCEL3*CELVL3-RENDMT3*MTVL3-RENDAV3*AVVL3 -RENDSO3*SOVL3- RENDAZ3*TIMTL3-RENDMSIL*MSILVL3-RVL3 >=0;
[IVL4] CING*PV*VL-RENDPOT4*POMTL4-RENDCEL4*CELVL4-RENDMT4*MTVL4- RENDAV4*AVVL4 -RENDSO4*SOVL4- RENDAZ4*TIMTL4-RENDMSIL*MSILVL4-RVL4 >=0;
[IVL5] CING*PV*VL-RENDPOT5*POMTL5-RENDCEL5*CELVL5-RENDMT5*MTVL5-RENDAV5*AVVL5 -RENDSO5*SOVL5- RENDAZ5*TIMTL5-RENDMSIL*MSILVL5-RVL5 >=0;
[IVL6] CING*PV*VL-RENDPOT6*POMTL6-RENDCEL6*CELVL6-RENDMT6*MTVL6-RENDAV6*AVVL6-RENDSO6*SOVL6-RENDAZ6*TIMTL6-RENDMSIL*MSILVL6-RVL6 >=0;
[IVL7] CING*PV*VL-RENDPOT7*POMTL7-RENDCEL7*CELVL7-RENDMT7*MTVL7-RENDAV7*AVVL7-RENDSO7*SOVL7-RENDAZ7*TIMTL7-RENDMSIL*MSILVL7-RVL7 >=0;
[IVL8] CING*PV*VL-RENDPOT8*POMTL8-RENDCEL8*CELVL8-RENDMT8*MTVL8-RENDAV8*AVVL8-RENDSO8*SOVL8-RENDAZ8*TIMTL8-RENDMSIL*MSILVL8-RVL8 >=0;
[IVL9] CING*PV*VL-RENDPOT9*POMTL9-RENDCEL9*CELVL9-RENDMT9*MTVL9-RENDAV9*AVVL9-RENDSO9*SOVL9-RENDAZ9*TIMTL9-RENDMSIL*MSILVL9-RVL9 >=0;
[IVL10] CING*PV*VL-RENDPOT10*POMTL10-RENDCEL10*CELVL10-RENDMT10*MTVL10-RENDAV10*AVVL10-RENDSO10*SOVL10-RENDAZ10*TIMTL10-RENDMSIL*MSILVL10-RVL10>=0;
[IVL11] CING*PV*VL-RENDPOT11*POMTL11-RENDCEL11*CELVL11-RENDMT11*MTVL11-RENDAV11*AVVL11-RENDSO11*SOVL11-RENDAZ11*TIMTL11-RENDMSIL*MSILVL11-RVL11>=0;
[IVL12] CING*PV*VL-RENDPOT12*POMTL12-RENDCEL12*CELVL12-RENDMT12*MTVL12-RENDAV12*AVVL12-RENDSO12*SOVL12-RENDAZ12*TIMTL12-RENDMSIL*MSILVL12-RVL12>=0;

!INGESTAO DO REBANHO (ANIMAIS NAO PRODUTIVOS);

[IREB1] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT1*POTREB1-RENDCEL1*CELREB1-RENDSO1*SOREB1-RENDMT1*MTREB1-RENDAV1*AVREB1-RENDAZ1*AZREB1-RENDMSIL*MSILREB1-RREB1>=0;
[IREB2] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT2*POTREB2-RENDCEL2*CELREB2-RENDSO2*SOREB2-RENDMT2*MTREB2-RENDAV2*AVREB2 - RENDAZ2*AZREB2-RENDMSIL*MSILREB2-RREB2 >=0;
[IREB3] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT3*POTREB3-RENDCEL3*CELREB3-RENDSO3*SOREB3-RENDMT3*MTREB3-RENDAV3*AVREB3 - RENDAZ3*AZREB3-RENDMSIL*MSILREB3-RREB3 >=0;
[IREB4] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT4*POTREB4-RENDCEL4*CELREB4-RENDSO4*SOREB4-RENDMT4*MTREB4-RENDAV4*AVREB4 - RENDAZ4*AZREB4-RENDMSIL*MSILREB4-RREB4 >=0;
[IREB5] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT5*POTREB5-RENDCEL5*CELREB5-RENDSO5*SOREB5-RENDMT5*MTREB5-RENDAV5*AVREB5 - RENDAZ5*AZREB5-RENDMSIL*MSILREB5-RREB5 >=0;

[IREB6] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT6*POTREB6-
RENDCEL6*CELREB6-RENDSO6*SOREB6-RENDMT6*MTREB6-
RENDAV6*AVREB6-RENDAZ6*AZREB6-RENDMSIL*MSILREB6-RREB6 >=0;
[IREB7] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT7*POTREB7-
RENDCEL7*CELREB7-RENDSO7*SOREB7-RENDMT7*MTREB7-
RENDAV7*AVREB7-RENDAZ7*AZREB7-RENDMSIL*MSILREB7-RREB7 >=0;
[IREB8] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT8*POTREB8-
RENDCEL8*CELREB8-RENDSO8*SOREB8-RENDMT8*MTREB8-
RENDAV8*AVREB8-RENDAZ8*AZREB8-RENDMSIL*MSILREB8-RREB8 >=0;
[IREB9] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT9*POTREB9-
RENDCEL9*CELREB9-RENDSO9*SOREB9-RENDMT9*MTREB9-
RENDAV9*AVREB9-RENDAZ9*AZREB9-RENDMSIL*MSILREB9-RREB9 >=0;
[IREB10] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT10*POTREB10-
RENDCEL10*CELREB10-RENDSO10*SOREB10-RENDMT10*MTREB10-
RENDAV10*AVREB10-RENDAZ10*AZREB10-RENDMSIL*MSILREB10-RREB10>=0;
[IREB11] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT11*POTREB11-
RENDCEL11*CELREB11-RENDSO11*SOREB11-RENDMT11*MTREB11-
RENDAV11*AVREB11-RENDAZ11*AZREB11-RENDMSIL*MSILREB11-RREB11>=0;
[IREB12] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT12*POTREB12-
RENDCEL12*CELREB12-RENDSO12*SOREB12-RENDMT12*MTREB12-
RENDAV12*AVREB12-RENDAZ12*AZREB12-RENDMSIL*MSILREB12-RREB12>=0;

!INGESTAO DE VOLUMOSOS DAS VACAS EM LACTACAO;

[VOLVL1] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT1*POMTL1-RENDCEL1*CELVL1-
RENDMT1*MTVL1-RENDAV1*AVVL1-RENDMSIL*MSILVL1-RENDAZ1*TIMTL1-
RENDSO1*SOVL1 <=0;
[VOLVL2] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT2*POMTL2-RENDCEL2*CELVL2-
RENDMT2*MTVL2-RENDAV2*AVVL2-RENDMSIL*MSILVL2 - RENDAZ2*TIMTL2-
RENDSO2*SOVL2 <=0;
[VOLVL3] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT3*POMTL3-RENDCEL3*CELVL3-
RENDMT3*MTVL3-RENDAV3*AVVL3-RENDMSIL*MSILVL3 - RENDAZ3*TIMTL3-
RENDSO3*SOVL3 <=0;
[VOLVL4] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT4*POMTL4-RENDCEL4*CELVL4-
RENDMT4*MTVL4- RENDAV4*AVVL4-RENDMSIL*MSILVL4 - RENDAZ4*TIMTL4-
RENDSO4*SOVL4 <=0;
[VOLVL5] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT5*POMTL5-RENDCEL5*CELVL5-
RENDMT5*MTVL5-RENDAV5*AVVL5-RENDMSIL*MSILVL5 - RENDAZ5*TIMTL5-
RENDSO5*SOVL5 <=0;
[VOLVL6] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT6*POMTL6-RENDCEL6*CELVL6-
RENDMT6*MTVL6-RENDAV6*AVVL6-RENDMSIL*MSILVL6-RENDAZ6*TIMTL6-
RENDSO6*SOVL6 <=0;
[VOLVL7] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT7*POMTL7-RENDCEL7*CELVL7-
RENDMT7*MTVL7-RENDAV7*AVVL7-RENDMSIL*MSILVL7-RENDAZ7*TIMTL7-
RENDSO7*SOVL7 <=0;
[VOLVL8] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT8*POMTL8-RENDCEL8*CELVL8-
RENDMT8*MTVL8-RENDAV8*AVVL8-RENDMSIL*MSILVL8-RENDAZ8*TIMTL8-
RENDSO8*SOVL8 <=0;

[VOLVL9] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT9*POMTL9-RENDCEL9*CELVL9-
RENDMT9*MTVL9-RENDAV9*AVVL9-RENDMSIL*MSILVL9-RENDAZ9*TIMTL9-
RENDSO9*SOVL9 <=0;
[VOLVL10] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT10*POMTL10-RENDCEL10*CELVL10-
RENDMT10*MTVL10-RENDMSIL*MSILVL10-RENDAV10*AVVL10-
RENDAZ10*TIMTL10-RENDSO10*SOVL10 <=0;
[VOLVL11] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT11*POMTL11-RENDCEL11*CELVL11-
RENDMT11*MTVL11-RENDMSIL*MSILVL11-RENDAV11*AVVL11-
RENDAZ11*TIMTL11-RENDSO11*SOVL11 <=0;
[VOLVL12] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT12*POMTL12-RENDCEL12*CELVL12-
RENDMT12*MTVL12-RENDMSIL*MSILVL12-RENDAV12*AVVL12-
RENDAZ12*TIMTL12-RENDSO12*SOVL12 <=0;

!INGESTAO DE VOLUMOSOS DO REBANHO (ANIMAIS NAO PRODUTIVOS);

[VOLREB1] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT1*POTREB1-RENDCEL1*CELREB1-RENDMT1*MTREB1-
RENDAV1*AVREB1-RENDMSIL*MSILREB1-RENDAZ1*AZREB1-
RENDSO1*SOREB1 <=0;

[VOLREB2] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT2*POTREB2-RENDCEL2*CELREB2-RENDMT2*MTREB2-
RENDAV2*AVREB2-RENDMSIL*MSILREB2 - RENDAZ2*AZREB2-
RENDSO2*SOREB2 <=0;

[VOLREB3] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT3*POTREB3-RENDCEL3*CELREB3-RENDMT3*MTREB3-
RENDAV3*AVREB3-RENDMSIL*MSILREB3 - RENDAZ3*AZREB3-
RENDSO3*SOREB3 <=0;
[VOLREB4] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT4*POTREB4-RENDCEL4*CELREB4-RENDMT4*MTREB4-
RENDAV4*AVREB4-RENDMSIL*MSILREB4 - RENDAZ4*AZREB4-
RENDSO4*SOREB4 <=0;
[VOLREB5] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT5*POTREB5-RENDCEL5*CELREB5-RENDMT5*MTREB5-
RENDAV5*AVREB5-RENDMSIL*MSILREB5 - RENDAZ5*AZREB5-
RENDSO5*SOREB5 <=0;
[VOLREB6] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT6*POTREB6-RENDCEL6*CELREB6-RENDMT6*MTREB6-
RENDAV6*AVREB6-RENDMSIL*MSILREB6-RENDAZ6*AZREB6-
RENDSO6*SOREB6 <=0;
[VOLREB7] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT7*POTREB7-RENDCEL7*CELREB7-RENDMT7*MTREB7-
RENDAV7*AVREB7-RENDMSIL*MSILREB7-RENDAZ7*AZREB7-
RENDSO7*SOREB7 <=0;
[VOLREB8] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT8*POTREB8-RENDCEL8*CELREB8-RENDMT8*MTREB8-
RENDAV8*AVREB8-RENDMSIL*MSILREB8-RENDAZ8*AZREB8-
RENDSO8*SOREB8 <=0;

```
[VOLREB9] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT9*POTREB9-RENDCEL9*CELREB9-RENDMT9*MTREB9-
RENDAV9*AVREB9-RENDMSIL*MSILREB9-RENDAZ9*AZREB9-
RENDSO9*SOREB9 <=0;
[VOLREB10] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT10*POTREB10-RENDCEL10*CELREB10-RENDMT10*MTREB10-
RENDAV10*AVREB10-RENDMSIL*MSILREB10-RENDAZ10*AZREB10-
RENDSO10*SOREB10 <=0;
[VOLREB11] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT11*POTREB11-RENDCEL11*CELREB11-RENDMT11*MTREB11-
RENDAV11*AVREB11-RENDMSIL*MSILREB11-RENDAZ11*AZREB11-
RENDSO11*SOREB11 <=0;
[VOLREB12] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT12*POTREB12-RENDCEL12*CELREB12-RENDMT12*MTREB12-
RENDAV12*AVREB12-RENDMSIL*MSILREB12-RENDAZ12*AZREB12-
RENDSO12*SOREB12 <=0;

! LIGACAO PASTAGENS MENSAIS E ANUAL;

! POTREIRO;
[POT1] POTVL1 + POTREB1 + POTS1 - POT <= 0;
[POT2] POTVL2 + POTREB2 + POTS2 - POT <= 0;
[POT3] POTVL3 + POTREB3 + POTS3 - POT <= 0;
[POT4] POTVL4 + POTREB4 + POTS4 - POT <= 0;
[POT5] POTVL5 + POTREB5 + POTS5 - POT <= 0;
[POT6] POTVL6 + POTREB6 + POTS6 - POT <= 0;
[POT7] POTVL7 + POTREB7 + POTS7 - POT <= 0;
[POT8] POTVL8 + POTREB8 + POTS8 - POT <= 0;
[POT9] POTVL9 + POTREB9 + POTS9 - POT <= 0;
[POT10] POTVL10 + POTREB10 + POTS10 - POT <= 0;
[POT11] POTVL11 + POTREB11 + POTS11 - POT <= 0;
[POT112] POTVL12 + POTREB12 + POTS12 - POT <= 0;

! CAPIM ELEFANTE;
[CEL1] CELVL1 + CELREB1 + CELS1 - CEL <= 0;
[CEL2] CELVL2 + CELREB2 + CELS2 - CEL <= 0;
[CEL3] CELVL3 + CELREB3 + CELS3 - CEL <= 0;
[CEL4] CELVL4 + CELREB4 + CELS4 - CEL <= 0;
[CEL5] CELVL5 + CELREB5 + CELS5 - CEL <= 0;
[CEL6] CELVL6 + CELREB6 + CELS6 - CEL <= 0;
[CEL7] CELVL7 + CELREB7 + CELS7 - CEL <= 0;
[CEL8] CELVL8 + CELREB8 + CELS8 - CEL <= 0;
[CEL9] CELVL9 + CELREB9 + CELS9 - CEL <= 0;
[CEL10] CELVL10 + CELREB10 + CELS10 - CEL <= 0;
[CEL11] CELVL11 + CELREB11 + CELS11 - CEL <= 0;
[CEL12] CELVL12 + CELREB12 + CELS12 - CEL <= 0;

! MILHETO;
[MT1] MTVL1 + MTREB1 + MTS1 - MT <= 0;
```

```
[MT2] MTVL2 + MTREB2 + MTS2 - MT <= 0;
[MT3] MTVL3 + MTREB3 + MTS3 - MT <= 0;
[MT4] MTVL4 + MTREB4 + MTS4 - MT <= 0;
[MT5] MTVL5 + MTREB5 + MTS5 - MT <= 0;
[MT6] MTVL6 + MTREB6 + MTS6 - MT <= 0;
[MT7] MTVL7 + MTREB7 + MTS7 - MT <= 0;
[MT8] MTVL8 + MTREB8 + MTS8 - MT <= 0;
[MT9] MTVL9 + MTREB9 + MTS9 - MT <= 0;
[MT10] MTVL10 + MTREB10 + MTS10 - MT <= 0;
[MT11] MTVL11 + MTREB11 + MTS11 - MT <= 0;
[MT12] MTVL12 + MTREB12 + MTS12 - MT <= 0;

! SORGO;
[SO1] SOVL1 + SOREB1 + SORS1 - SOR <= 0;
[SO2] SOVL2 + SOREB2 + SORS2 - SOR <= 0;
[SO3] SOVL3 + SOREB3 + SORS3 - SOR <= 0;
[SO4] SOVL4 + SOREB4 + SORS4 - SOR <= 0;
[SO5] SOVL5 + SOREB5 + SORS5 - SOR <= 0;
[SO6] SOVL6 + SOREB6 + SORS6 - SOR <= 0;
[SO7] SOVL7 + SOREB7 + SORS7 - SOR <= 0;
[SO8] SOVL8 + SOREB8 + SORS8 - SOR <= 0;
[SO9] SOVL9 + SOREB9 + SORS9 - SOR <= 0;
[SO10] SOVL10 + SOREB10 + SORS10 - SOR <= 0;
[SO11] SOVL11 + SOREB11 + SORS11 - SOR <= 0;
[SO12] SOVL12 + SOREB12 + SORS12 - SOR <= 0;

! AVEIA;
[AV1] AVVL1 + AVREB1 + AVS1 - AV <= 0;
[AV2] AVVL2 + AVREB2 + AVS2 - AV <= 0;
[AV3] AVVL3 + AVREB3 + AVS3 - AV <= 0;
[AV4] AVVL4 + AVREB4 + AVS4 - AV <= 0;
[AV5] AVVL5 + AVREB5 + AVS5 - AV <= 0;
[AV6] AVVL6 + AVREB6 + AVS6 - AV <= 0;
[AV7] AVVL7 + AVREB7 + AVS7 - AV <= 0;
[AV8] AVVL8 + AVREB8 + AVS8 - AV <= 0;
[AV9] AVVL9 + AVREB9 + AVS9 - AV <= 0;
[AV10] AVVL10 + AVREB10 + AVS10 - AV <= 0;
[AV11] AVVL11 + AVREB11 + AVS11 - AV <= 0;
[AV12] AVVL12 + AVREB12 + AVS12 - AV <= 0;

! AZEVEM;
[AZ1] AZVL1 + AZREB1 + AZS1 - AZ <= 0;
[AZ2] AZVL2 + AZREB2 + AZS2 - AZ <= 0;
[AZ3] AZVL3 + AZREB3 + AZS3 - AZ <= 0;
[AZ4] AZVL4 + AZREB4 + AZS4 - AZ <= 0;
[AZ5] AZVL5 + AZREB5 + AZS5 - AZ <= 0;
[AZ6] AZVL6 + AZREB6 + AZS6 - AZ <= 0;
[AZ7] AZVL7 + AZREB7 + AZS7 - AZ <= 0;
[AZ8] AZVL8 + AZREB8 + AZS8 - AZ <= 0;
```

```
[AZ9] AZVL9 + AZREB9 + AZS9 - AZ <= 0;
[AZ10] AZVL10 + AZREB10 + AZS10 - AZ <= 0;
[AZ11] AZVL11 + AZREB11 + AZS11 - AZ <= 0;
[AZ12] AZVL12 + AZREB12 + AZS12 - AZ <= 0;

! PERDAS EFETIVAS DE PASTO;

! POTREIRO;
[PPPOT1] POT*PAPOTV - POTS1 - PEFPOT1 <= 0;
[PPPOT2] POT*PAPOTV - POTS2 - PEFPOT2 <= 0;
[PPPOT3] POT*PAPOTV - POTS3 - PEFPOT3 <= 0;
[PPPOT4] POT*PAPOTV - POTS4 - PEFPOT4 <= 0;
[PPPOT5] POT*PAPOTI - POTS5 - PEFPOT5 <= 0;
[PPPOT6] POT*PAPOTI - POTS6 - PEFPOT6 <= 0;
[PPPOT7] POT*PAPOTI - POTS7 - PEFPOT7 <= 0;
[PPPOT8] POT*PAPOTI - POTS8 - PEFPOT8 <= 0;
[PPPOT9] POT*PAPOTI - POTS9 - PEFPOT9 <= 0;
[PPPOT10] POT*PAPOTV - POTS10 - PEFPOT10 <= 0;
[PPPOT11] POT*PAPOTV - POTS11 - PEFPOT11 <= 0;
[PPPOT12] POT*PAPOTV - POTS12 - PEFPOT12 <= 0;

! CAPIM ELEFANTE;
[PPCEL1] CEL*PACEL - CELS1 - PEFCEL1 <= 0;
[PPCEL2] CEL*PACEL - CELS2 - PEFCEL2 <= 0;
[PPCEL3] CEL*PACEL - CELS3 - PEFCEL3 <= 0;
[PPCEL4] CEL*PACEL - CELS4 - PEFCEL4 <= 0;
[PPCEL5] CEL*PACEL - CELS5 - PEFCEL5 <= 0;
[PPCEL6] CEL*PACEL - CELS6 - PEFCEL6 <= 0;
[PPCEL7] CEL*PACEL - CELS7 - PEFCEL7 <= 0;
[PPCEL8] CEL*PACEL - CELS8 - PEFCEL8 <= 0;
[PPCEL9] CEL*PACEL - CELS9 - PEFCEL9 <= 0;
[PPCEL10] CEL*PACEL - CELS10 - PEFCEL10 <= 0;
[PPCEL11] CEL*PACEL - CELS11 - PEFCEL11 <= 0;
[PPCEL12] CEL*PACEL - CELS12 - PEFCEL12 <= 0;

! MILHETO;
[PPMT1] MT*PAMT - MTS1 - PEFMT1 <= 0;
[PPMT2] MT*PAMT - MTS2 - PEFMT2 <= 0;
[PPMT3] MT*PAMT - MTS3 - PEFMT3 <= 0;
[PPMT4] MT*PAMT - MTS4 - PEFMT4 <= 0;
[PPMT5] MT*PAMT - MTS5 - PEFMT5 <= 0;
[PPMT6] MT*PAMT - MTS6 - PEFMT6 <= 0;
[PPMT7] MT*PAMT - MTS7 - PEFMT7 <= 0;
[PPMT8] MT*PAMT - MTS8 - PEFMT8 <= 0;
[PPMT9] MT*PAMT - MTS9 - PEFMT9 <= 0;
[PPMT10] MT*PAMT - MTS10 - PEFMT10 <= 0;
[PPMT11] MT*PAMT - MTS11 - PEFMT11 <= 0;
[PPMT12] MT*PAMT - MTS12 - PEFMT12 <= 0;
```

```
! SORGO;
[PPSO1] SOR*PASOR - SORS1 - PEFSOR1 <= 0;
[PPSO2] SOR*PASOR - SORS2 - PEFSOR2 <= 0;
[PPSO3] SOR*PASOR - SORS3 - PEFSOR3 <= 0;
[PPSO4] SOR*PASOR - SORS4 - PEFSOR4 <= 0;
[PPSO5] SOR*PASOR - SORS5 - PEFSOR5 <= 0;
[PPSO6] SOR*PASOR - SORS6 - PEFSOR6 <= 0;
[PPSO7] SOR*PASOR - SORS7 - PEFSOR7 <= 0;
[PPSO8] SOR*PASOR - SORS8 - PEFSOR8 <= 0;
[PPSO9] SOR*PASOR - SORS9 - PEFSOR9 <= 0;
[PPSO10] SOR*PASOR - SORS10 - PEFSOR10 <= 0;
[PPSO11] SOR*PASOR - SORS11 - PEFSOR11 <= 0;
[PPSO12] SOR*PASOR - SORS12 - PEFSOR12 <= 0;

! AVEIA;
[PPAV1] AV*PAAV - AVS1 - PEFAV1 <= 0;
[PPAV2] AV*PAAV - AVS2 - PEFAV2 <= 0;
[PPAV3] AV*PAAV - AVS3 - PEFAV3 <= 0;
[PPAV4] AV*PAAV - AVS4 - PEFAV4 <= 0;
[PPAV5] AV*PAAV - AVS5 - PEFAV5 <= 0;
[PPAV6] AV*PAAV - AVS6 - PEFAV6 <= 0;
[PPAV7] AV*PAAV - AVS7 - PEFAV7 <= 0;
[PPAV8] AV*PAAV - AVS8 - PEFAV8 <= 0;
[PPAV9] AV*PAAV - AVS9 - PEFAV9 <= 0;
[PPAV10] AV*PAAV - AVS10 - PEFAV10 <= 0;
[PPAV11] AV*PAAV - AVS11 - PEFAV11 <= 0;
[PPAV12] AV*PAAV - AVS12 - PEFAV12 <= 0;

! AZEVEM;
[PPAZ1] AZ*PAAZ - AZS1 - PEFAZ1 <= 0;
[PPAZ2] AZ*PAAZ - AZS2 - PEFAZ2 <= 0;
[PPAZ3] AZ*PAAZ - AZS3 - PEFAZ3 <= 0;
[PPAZ4] AZ*PAAZ - AZS4 - PEFAZ4 <= 0;
[PPAZ5] AZ*PAAZ - AZS5 - PEFAZ5 <= 0;
[PPAZ6] AZ*PAAZ - AZS6 - PEFAZ6 <= 0;
[PPAZ7] AZ*PAAZ - AZS7 - PEFAZ7 <= 0;
[PPAZ8] AZ*PAAZ - AZS8 - PEFAZ8 <= 0;
[PPAZ9] AZ*PAAZ - AZS9 - PEFAZ9 <= 0;
[PPAZ10] AZ*PAAZ - AZS10 - PEFAZ10 <= 0;
[PPAZ11] AZ*PAAZ - AZS11 - PEFAZ11 <= 0;
[PPAZ12] AZ*PAAZ - AZS12 - PEFAZ12 <= 0;


! CONSUMO FINAL DAS VACAS EM LACTACAO;

! POTREIRO;
[QCPOT1] POTVL1 - PEFPOT1 - QCVLPOT1 <= 0;
[QCPOT2] POTVL2 - PEFPOT2 - QCVLPOT2 <= 0;
[QCPOT3] POTVL3 - PEFPOT3 - QCVLPOT3 <= 0;
```

```
[QCPOT4] POTVL4 - PEFPOT4 - QCVLPOT4 <= 0;
[QCPOT5] POTVL5 - PEFPOT5 - QCVLPOT5 <= 0;
[QCPOT6] POTVL6 - PEFPOT6 - QCVLPOT6 <= 0;
[QCPOT7] POTVL7 - PEFPOT7 - QCVLPOT7 <= 0;
[QCPOT8] POTVL8 - PEFPOT8 - QCVLPOT8 <= 0;
[QCPOT9] POTVL9 - PEFPOT9 - QCVLPOT9 <= 0;
[QCPOT10] POTVL10 - PEFPOT10 - QCVLPOT10 <= 0;
[QCPOT11] POTVL11 - PEFPOT11 - QCVLPOT11 <= 0;
[QCPOT12] POTVL12 - PEFPOT12 - QCVLPOT12 <= 0;

! CAPIM ELEFANTE;
[QCCEL1] CELVL1 - PEFCEL1 - QCVLCEL1 <= 0;
[QCCEL2] CELVL2 - PEFCEL2 - QCVLCEL2 <= 0;
[QCCEL3] CELVL3 - PEFCEL3 - QCVLCEL3 <= 0;
[QCCEL4] CELVL4 - PEFCEL4 - QCVLCEL4 <= 0;
[QCCEL5] CELVL5 - PEFCEL5 - QCVLCEL5 <= 0;
[QCCEL6] CELVL6 - PEFCEL6 - QCVLCEL6 <= 0;
[QCCEL7] CELVL7 - PEFCEL7 - QCVLCEL7 <= 0;
[QCCEL8] CELVL8 - PEFCEL8 - QCVLCEL8 <= 0;
[QCCEL9] CELVL9 - PEFCEL9 - QCVLCEL9 <= 0;
[QCCEL10] CELVL10 - PEFCEL10 - QCVLCEL10 <= 0;
[QCCEL11] CELVL11 - PEFCEL11 - QCVLCEL11 <= 0;
[QCCEL12] CELVL12 - PEFCEL12 - QCVLCEL12 <= 0;

! MILHETO;
[QCMIT1] MTVL1 - PEFMT1 - QCVLMT1 <= 0;
[QCMIT2] MTVL2 - PEFMT2 - QCVLMT2 <= 0;
[QCMIT3] MTVL3 - PEFMT3 - QCVLMT3 <= 0;
[QCMIT4] MTVL4 - PEFMT4 - QCVLMT4 <= 0;
[QCMIT5] MTVL5 - PEFMT5 - QCVLMT5 <= 0;
[QCMIT6] MTVL6 - PEFMT6 - QCVLMT6 <= 0;
[QCMIT7] MTVL7 - PEFMT7 - QCVLMT7 <= 0;
[QCMIT8] MTVL8 - PEFMT8 - QCVLMT8 <= 0;
[QCMIT9] MTVL9 - PEFMT9 - QCVLMT9 <= 0;
[QCMIT10] MTVL10 - PEFMT10 - QCVLMT10 <= 0;
[QCMIT11] MTVL11 - PEFMT11 - QCVLMT11 <= 0;
[QCMIT12] MTVL12 - PEFMT12 - QCVLMT12 <= 0;

! SORGO;
[QCSOR1] SORVL1 - PEFSOR1 - QCVLSOR1 <= 0;
[QCSOR2] SORVL2 - PEFSOR2 - QCVLSOR2 <= 0;
[QCSOR3] SORVL3 - PEFSOR3 - QCVLSOR3 <= 0;
[QCSOR4] SORVL4 - PEFSOR4 - QCVLSOR4 <= 0;
[QCSOR5] SORVL5 - PEFSOR5 - QCVLSOR5 <= 0;
[QCSOR6] SORVL6 - PEFSOR6 - QCVLSOR6 <= 0;
[QCSOR7] SORVL7 - PEFSOR7 - QCVLSOR7 <= 0;
[QCSOR8] SORVL8 - PEFSOR8 - QCVLSOR8 <= 0;
[QCSOR9] SORVL9 - PEFSOR9 - QCVLSOR9 <= 0;
[QCSOR10] SORVL10 - PEFSOR10 - QCVLSOR10 <= 0;
```

```
[QCSOR11] SORVL11 - PEFSOR11 - QCVLSOR11 <= 0;
[QCSOR12] SORVL12 - PEFSOR12 - QCVLSOR12 <= 0;

! AVEIA;
[QCAV1] AVVL1 - PEFAV1 - QCVLAV1 <= 0;
[QCAV2] AVVL2 - PEFAV2 - QCVLAV2 <= 0;
[QCAV3] AVVL3 - PEFAV3 - QCVLAV3 <= 0;
[QCAV4] AVVL4 - PEFAV4 - QCVLAV4 <= 0;
[QCAV5] AVVL5 - PEFAV5 - QCVLAV5 <= 0;
[QCAV6] AVVL6 - PEFAV6 - QCVLAV6 <= 0;
[QCAV7] AVVL7 - PEFAV7 - QCVLAV7 <= 0;
[QCAV8] AVVL8 - PEFAV8 - QCVLAV8 <= 0;
[QCAV9] AVVL9 - PEFAV9 - QCVLAV9 <= 0;
[QCAV10] AVVL10 - PEFAV10 - QCVLAV10 <= 0;
[QCAV11] AVVL11 - PEFAV11 - QCVLAV11 <= 0;
[QCAV12] AVVL12 - PEFAV12 - QCVLAV12 <= 0;

! AZEVEM;
[QCAZ1] AZVL1 - PEFAZ1 - QCVLAZ1 <= 0;
[QCAZ2] AZVL2 - PEFAZ2 - QCVLAZ2 <= 0;
[QCAZ3] AZVL3 - PEFAZ3 - QCVLAZ3 <= 0;
[QCAZ4] AZVL4 - PEFAZ4 - QCVLAZ4 <= 0;
[QCAZ5] AZVL5 - PEFAZ5 - QCVLAZ5 <= 0;
[QCAZ6] AZVL6 - PEFAZ6 - QCVLAZ6 <= 0;
[QCAZ7] AZVL7 - PEFAZ7 - QCVLAZ7 <= 0;
[QCAZ8] AZVL8 - PEFAZ8 - QCVLAZ8 <= 0;
[QCAZ9] AZVL9 - PEFAZ9 - QCVLAZ9 <= 0;
[QCAZ10] AZVL10 - PEFAZ10 - QCVLAZ10 <= 0;
[QCAZ11] AZVL11 - PEFAZ11 - QCVLAZ11 <= 0;
[QCAZ12] AZVL12 - PEFAZ12 - QCVLAZ12 <= 0;

! DIMINUICAO EFETIVA DO CONSUMO DAS VACAS EM LACTACAO;

! POTREIRO;
[DCPOT1] POTVL1 - PEPOT1 - QCVLPOT1 <= 0;
[DCPOT2] POTVL2 - PEPOT2 - QCVLPOT2 <= 0;
[DCPOT3] POTVL3 - PEPOT3 - QCVLPOT3 <= 0;
[DCPOT4] POTVL4 - PEPOT4 - QCVLPOT4 <= 0;
[DCPOT5] POTVL5 - PEPOT5 - QCVLPOT5 <= 0;
[DCPOT6] POTVL6 - PEPOT6 - QCVLPOT6 <= 0;
[DCPOT7] POTVL7 - PEPOT7 - QCVLPOT7 <= 0;
[DCPOT8] POTVL8 - PEPOT8 - QCVLPOT8 <= 0;
[DCPOT9] POTVL9 - PEPOT9 - QCVLPOT9 <= 0;
[DCPOT10] POTVL10 - PEPOT10 - QCVLPOT10 <= 0;
[DCPOT11] POTVL11 - PEPOT11 - QCVLPOT11 <= 0;
[DCPOT12] POTVL12 - PEPOT12 - QCVLPOT12 <= 0;

! CAPIM ELEFANTE;
[DCCEL1] CELVL1 - PECEL1 - QCVLCEL1 <= 0;
```

```
[DCCEL2] CELVL2 - PECEL2 - QCVLCEL2 <= 0;
[DCCEL3] CELVL3 - PECEL3 - QCVLCEL3 <= 0;
[DCCEL4] CELVL4 - PECEL4 - QCVLCEL4 <= 0;
[DCCEL5] CELVL5 - PECEL5 - QCVLCEL5 <= 0;
[DCCEL6] CELVL6 - PECEL6 - QCVLCEL6 <= 0;
[DCCEL7] CELVL7 - PECEL7 - QCVLCEL7 <= 0;
[DCCEL8] CELVL8 - PECEL8 - QCVLCEL8 <= 0;
[DCCEL9] CELVL9 - PECEL9 - QCVLCEL9 <= 0;
[DCCEL10] CELVL10 - PECEL10 - QCVLCEL10 <= 0;
[DCCEL11] CELVL11 - PECEL11 - QCVLCEL11 <= 0;
[DCCEL12] CELVL12 - PECEL12 - QCVLCEL12 <= 0;

! MILHETO;
[DCMIT1] MTVL1 - PEMT1 - QCVLMT1 <= 0;
[DCMIT2] MTVL2 - PEMT2 - QCVLMT2 <= 0;
[DCMIT3] MTVL3 - PEMT3 - QCVLMT3 <= 0;
[DCMIT4] MTVL4 - PEMT4 - QCVLMT4 <= 0;
[DCMIT5] MTVL5 - PEMT5 - QCVLMT5 <= 0;
[DCMIT6] MTVL6 - PEMT6 - QCVLMT6 <= 0;
[DCMIT7] MTVL7 - PEMT7 - QCVLMT7 <= 0;
[DCMIT8] MTVL8 - PEMT8 - QCVLMT8 <= 0;
[DCMIT9] MTVL9 - PEMT9 - QCVLMT9 <= 0;
[DCMIT10] MTVL10 - PEMT10 - QCVLMT10 <= 0;
[DCMIT11] MTVL11 - PEMT11 - QCVLMT11 <= 0;
[DCMIT12] MTVL12 - PEMT12 - QCVLMT12 <= 0;

! SORGO;
[DCSOR1] SORVL1 - PESOR1 - QCVLSOR1 <= 0;
[DCSOR2] SORVL2 - PESOR2 - QCVLSOR2 <= 0;
[DCSOR3] SORVL3 - PESOR3 - QCVLSOR3 <= 0;
[DCSOR4] SORVL4 - PESOR4 - QCVLSOR4 <= 0;
[DCSOR5] SORVL5 - PESOR5 - QCVLSOR5 <= 0;
[DCSOR6] SORVL6 - PESOR6 - QCVLSOR6 <= 0;
[DCSOR7] SORVL7 - PESOR7 - QCVLSOR7 <= 0;
[DCSOR8] SORVL8 - PESOR8 - QCVLSOR8 <= 0;
[DCSOR9] SORVL9 - PESOR9 - QCVLSOR9 <= 0;
[DCSOR10] SORVL10 - PESOR10 - QCVLSOR10 <= 0;
[DCSOR11] SORVL11 - PESOR11 - QCVLSOR11 <= 0;
[DCSOR12] SORVL12 - PESOR12 - QCVLSOR12 <= 0;

! AVEIA;
[DCAV1] AVVL1 - PEAV1 - QCVLAV1 <= 0;
[DCAV2] AVVL2 - PEAV2 - QCVLAV2 <= 0;
[DCAV3] AVVL3 - PEAV3 - QCVLAV3 <= 0;
[DCAV4] AVVL4 - PEAV4 - QCVLAV4 <= 0;
[DCAV5] AVVL5 - PEAV5 - QCVLAV5 <= 0;
[DCAV6] AVVL6 - PEAV6 - QCVLAV6 <= 0;
[DCAV7] AVVL7 - PEAV7 - QCVLAV7 <= 0;
[DCAV8] AVVL8 - PEAV8 - QCVLAV8 <= 0;
```

```
[DCAV9] AVVL9 - PEAV9 - QCVLAV9 <= 0;
[DCAV10] AVVL10 - PEAV10 - QCVLAV10 <= 0;
[DCAV11] AVVL11 - PEAV11 - QCVLAV11 <= 0;
[DCAV12] AVVL12 - PEAV12 - QCVLAV12 <= 0;

! AZEVEM;
[DCAZ1] AZVL1 - PEAZ1 - QCVLAZ1 <= 0;
[DCAZ2] AZVL2 - PEAZ2 - QCVLAZ2 <= 0;
[DCAZ3] AZVL3 - PEAZ3 - QCVLAZ3 <= 0;
[DCAZ4] AZVL4 - PEAZ4 - QCVLAZ4 <= 0;
[DCAZ5] AZVL5 - PEAZ5 - QCVLAZ5 <= 0;
[DCAZ6] AZVL6 - PEAZ6 - QCVLAZ6 <= 0;
[DCAZ7] AZVL7 - PEAZ7 - QCVLAZ7 <= 0;
[DCAZ8] AZVL8 - PEAZ8 - QCVLAZ8 <= 0;
[DCAZ9] AZVL9 - PEAZ9 - QCVLAZ9 <= 0;
[DCAZ10] AZVL10 - PEAZ10 - QCVLAZ10 <= 0;
[DCAZ11] AZVL11 - PEAZ11 - QCVLAZ11 <= 0;
[DCAZ12] AZVL12 - PEAZ12 - QCVLAZ12 <= 0;


!PERDA EM LEITE;

! POTREIRO;
[PPLPOT1] (680*PEPOT1)/1.15 <= PLPOT1;
[PPLPOT2] (340*PEPOT2)/1.15 <= PLPOT2;
[PPLPOT3] (238*PEPOT3)/1.15 <= PLPOT3;
[PPLPOT4] (170*PEPOT4)/1.15 <= PLPOT4;
[PPLPOT5] (102*PEPOT5)/1.15 <= PLPOT5;
[PPLPOT6] (68*PEPOT6)/1.15 <= PLPOT6;
[PPLPOT7] (34*PEPOT7)/1.15 <= PLPOT7;
[PPLPOT8] (68*PEPOT8)/1.15 <= PLPOT8;
[PPLPOT9] (340*PEPOT9)/1.15 <= PLPOT9;
[PPLPOT10] (340*PEPOT10)/1.15 <= PLPOT10;
[PPLPOT11] (510*PEPOT11)/1.15 <= PLPOT11;
[PPLPOT12] (510*PEPOT12)/1.15 <= PLPOT12;
[PPLPOTVR] PLPOT1+PLPOT2+PLPOT3+PLPOT4+PLPOT10+PLPOT11+PLPOT12 <=
PLPOTV;
[PLPOTIR] PLPOT5+PLPOT6+PLPOT7+PLPOT8+PLPOT9 <= PLPOTI;

! CAPIM ELEFANTE;
[PPLCEL1] (2250*PECEL1)/1.15 <= PLCEL1;
[PPLCEL2] (1350*PECEL2)/1.15 <= PLCEL2;
[PPLCEL3] (900*PECEL3)/1.15 <= PLCEL3;
[PPLCEL4] (900*PECEL4)/1.15 <= PLCEL4;
[PPLCEL5] (0*PECEL5)/1.15 <= PLCEL5;
[PPLCEL6] (0*PECEL6)/1.15 <= PLCEL6;
[PPLCEL7] (0*PECEL7)/1.15 <= PLCEL7;
[PPLCEL8] (0*PECEL8)/1.15 <= PLCEL8;
[PPLCEL9] (450*PECEL9)/1.15 <= PLCEL9;
```

```
[PPLCEL10] (900*PECEL10)/1.15 <= PLCEL10;
[PPLCEL11] (900*PECEL11)/1.15 <= PLCEL11;
[PPLCEL12] (1350*PECEL12)/1.15 <= PLCEL12;
[PLCELR]
PLCEL1+PLCEL2+PLCEL3+PLCEL4+PLCEL9+PLCEL10+PLCEL11+PLCEL12 <=
PLCEL;

! MILHETO;
[PPLMT1] (1800*PEMT1)/1.15 <= PLMT1;
[PPLMT2] (1440*PEMT2)/1.15 <= PLMT2;
[PPLMT3] (720*PEMT3)/1.15 <= PLMT3;
[PPLMT4] (720*PEMT4)/1.15 <= PLMT4;
[PPLMT5] (360*PEMT5)/1.15 <= PLMT5;
[PPLMT6] (0*PEMT6)/1.15 <= PLMT6;
[PPLMT7] (0*PEMT7)/1.15 <= PLMT7;
[PPLMT8] (0*PEMT8)/1.15 <= PLMT8;
[PPLMT9] (0*PEMT9)/1.15 <= PLMT9;
[PPLMT10] (360*PEMT10)/1.15 <= PLMT10;
[PPLMT11] (720*PEMT11)/1.15 <= PLMT11;
[PPLMT12] (1080*PEMT12)/1.15 <= PLMT12;
[PLMTR] PLMT1+PLMT2+PLMT3+PLMT4+PLMT5+PLMT10+PLMT11+PLMT12 <=
PLMT;

! SORGO;
[PPLSOR1] (1800*PESOR1)/1.15 <= PLSOR1;
[PPLSOR2] (1440*PESOR2)/1.15 <= PLSOR2;
[PPLSOR3] (720*PESOR3)/1.15 <= PLSOR3;
[PPLSOR4] (360*PESOR4)/1.15 <= PLSOR4;
[PPLSOR5] (0*PESOR5)/1.15 <= PLSOR5;
[PPLSOR6] (0*PESOR6)/1.15 <= PLSOR6;
[PPLSOR7] (0*PESOR7)/1.15 <= PLSOR7;
[PPLSOR8] (0*PESOR8)/1.15 <= PLSOR8;
[PPLSOR9] (360*PESOR9)/1.15 <= PLSOR9;
[PPLSOR10] (720*PESOR10)/1.15 <= PLSOR10;
[PPLSOR11] (720*PESOR11)/1.15 <= PLSOR11;
[PPLSOR12] (1080*PESOR12)/1.15 <= PLSOR12;
[PLSORR]PLSOR1+PLSOR2+PLSOR3+PLSOR4+PLSOR9+PLSOR10+PLSOR11+PLSOR
12 <= PLSOR;

!AVEIA;
[PPLAV1] (0*PEAV1)/1.15 <= PLAV1;
[PPLAV2] (0*PEAV2)/1.15 <= PLAV2;
[PPLAV3] (0*PEAV3)/1.15 <= PLAV3;
[PPLAV4] (0*PEAV4)/1.15 <= PLAV4;
[PPLAV5] (0*PEAV5)/1.15 <= PLAV5;
[PPLAV6] (1200*PEAV6)/1.15 <= PLAV6;
[PPLAV7] (1800*PEAV7)/1.15 <= PLAV7;
[PPLAV8] (1800*PEAV8)/1.15 <= PLAV8;
[PPLAV9] (1200*PEAV9)/1.15 <= PLAV9;
```

```
[PPLAV10] (0*PEAV10)/1.15 <= PLAV10;
[PPLAV11] (0*PEAV11)/1.15 <= PLAV11;
[PPLAV12] (0*PEAV12)/1.15 <= PLAV12;
[PLAVR] PLAV6+PLAV7+PLAV8+PLAV9 <= PLAV;

! AZEVEM;
[PPLAZ1] (0*PEAZ1)/1.15 <= PLAZ1;
[PPLAZ2] (0*PEAZ2)/1.15 <= PLAZ2;
[PPLAZ3] (0*PEAZ3)/1.15 <= PLAZ3;
[PPLAZ4] (0*PEAZ4)/1.15 <= PLAZ4;
[PPLAZ5] (0*PEAZ5)/1.15 <= PLAZ5;
[PPLAZ6] (0*PEAZ6)/1.15 <= PLAZ6;
[PPLAZ7] (1200*PEAZ7)/1.15 <= PLAZ7;
[PPLAZ8] (1800*PEAZ8)/1.15 <= PLAZ8;
[PPLAZ9] (2100*PEAZ9)/1.15 <= PLAZ9;
[PPLAZ10] (900*PEAZ10)/1.15 <= PLAZ10;
[PPLAZ11] (0*PEAZ11)/1.15 <= PLAZ11;
[PPLAZ12] (0*PEAZ12)/1.15 <= PLAZ12;
[PLAZR] PLAZ7+PLAZ8+PLAZ9+PLAZ10 <= PLAZ;


! LIGACAO PASTAGENS MENSAIS E ANUAL;

!LIGACAO RACAO MENSAL E ANUAL;

!RACAO VACAS EM LACTACAO;
[LRVL] RVL1 + RVL2 + RVL3 + RVL4 + RVL5 + RVL6 + RVL7 + RVL8 + RVL9 +
RVL10 + RVL11 + RVL12 - RVL = 0;

!RACAO REBANHO;
[LRREB] RREB1 + RREB2 + RREB3 + RREB4 + RREB5 + RREB6 + RREB7 + RREB8 +
RREB9 + RREB10 + RREB11 + RREB12 - RREB = 0;

!RACAO TOTAL;
[RTOT] RVL + RREB = R;

!LIGACAO SILAGEM MENSAL E ANUAL;

[SVLVER] MSILVL1 + MSILVL2 + MSILVL3 + MSILVL4 + MSILVL10 + MSILVL11 +
MSILVL12 = MSILVLVER;

[SVLINV] MSILVL5 + MSILVL6 + MSILVL7 + MSILVL8 + MSILVL9 = MSILVLINV;

[SVL] MSILVLVER + MSILVLINV = MSILVL;

[SREB] MSILREB1 + MSILREB2 + MSILREB3 + MSILREB4 + MSILREB5 + MSILREB6
+ MSILREB7 + MSILREB8 + MSILREB9 + MSILREB10 + MSILREB11 + MSILREB12 =
MSILREB;
```

```
[MSILT] MSILVL + MSILREB = MSIL;

!LIGACAO LEITE MENSAL E ANUAL;

[LEIT] LEITE = L1 + L2 + L3 + L4 + L5 + L6 + L7 + L8 + L9 + L10 + L11 + L12;

! LIGACAO ENTRE AS CATEGORIAS DO REBANHO;

[VLVS] (1-RVLVT)*VL - RVLVT*VS <= 0;
[VLT] 0.5*VL - T <= 0;
[VLN] 0.5*(1-MORT)*VL - N <= 0;
[VLVD] VD - 0.4*VL <= 0;

! RENDIMENTO DAS PASTAGENS;

!POTREIRO;
[RPOT1] RENDPOT1 = .2*RENDPOT;
[RPOT2] RENDPOT2 = .1*RENDPOT;
[RPOT3] RENDPOT3 = .07*RENDPOT;
[RPOT4] RENDPOT4 = .05*RENDPOT;
[RPOT5] RENDPOT5 = .03*RENDPOT;
[RPOT6] RENDPOT6 = .02*RENDPOT;
[RPOT7] RENDPOT7 = .01*RENDPOT;
[RPOT8] RENDPOT8 = .02*RENDPOT;
[RPOT9] RENDPOT9 = .1*RENDPOT;
[RPOT10] RENDPOT10 = .1*RENDPOT;
[RPOT11] RENDPOT11 = .15*RENDPOT;
[RPOT12] RENDPOT12 = .15*RENDPOT;

!CAPIM ELEFANTE;
[RCEL1] RENDCEL1 = .25*RENDCEL;
[RCEL2] RENDCEL2 = .15*RENDCEL;
[RCEL3] RENDCEL3 = .1*RENDCEL;
[RCEL4] RENDCEL4 = .1*RENDCEL;
[RCEL5] RENDCEL5 = 0*RENDCEL;
[RCEL6] RENDCEL6 = 0*RENDCEL;
[RCEL7] RENDCEL7 = 0*RENDCEL;
[RCEL8] RENDCEL8 = 0*RENDCEL;
[RCEL9] RENDCEL9 = .05*RENDCEL;
[RCEL10] RENDCEL10 = .1*RENDCEL;
[RCEL11] RENDCEL11 = .1*RENDCEL;
[RCEL12] RENDCEL12 = .15*RENDCEL;

!MILHETO;
[RMT1] RENDMT1 = .25*RENDMT;
[RMT2] RENDMT2 = .2*RENDMT;
[RMT3] RENDMT3 = .1*RENDMT;
[RMT4] RENDMT4 = .1*RENDMT;
[RMT5] RENDMT5 = .05*RENDMT;
```

```
[RMT6] RENDMT6 = 0*RENDMT;
[RMT7] RENDMT7 = 0*RENDMT;
[RMT8] RENDMT8 = 0*RENDMT;
[RMT9] RENDMT9 = 0*RENDMT;
[RMT10] RENDMT10 = .05*RENDMT;
[RMT11] RENDMT11 = .1*RENDMT;
[RMT12] RENDMT12 = .15*RENDSO;

!SORGO;
[RSO1] RENDSO1 = .25*RENDSO;
[RSO2] RENDSO2 = .2*RENDSO;
[RSO3] RENDSO3 = .1*RENDSO;
[RSO4] RENDSO4 = .05*RENDSO;
[RSO5] RENDSO5 = 0*RENDSO;
[RSO6] RENDSO6 = 0*RENDSO;
[RSO7] RENDSO7 = 0*RENDSO;
[RSO8] RENDSO8 = 0*RENDSO;
[RSO9] RENDSO9 = .05*RENDSO;
[RSO10] RENDSO10 = .1*RENDSO;
[RSO11] RENDSO11 = .1*RENDSO;
[RSO12] RENDSO12 = .15*RENDSO;

!AVEIA;
[RAV1] RENDAV1 = 0*RENDAV;
[RAV2] RENDAV2 = 0*RENDAV;
[RAV3] RENDAV3 = 0*RENDAV;
[RAV4] RENDAV4 = 0*RENDAV;
[RAV5] RENDAV5 = 0*RENDAV;
[RAV6] RENDAV6 = .2*RENDAV;
[RAV7] RENDAV7 = .3*RENDAV;
[RAV8] RENDAV8 = .3*RENDAV;
[RAV9] RENDAV9 = .2*RENDAV;
[RAV10] RENDAV10 = 0*RENDAV;
[RAV11] RENDAV11 = 0*RENDAV;
[RAV12] RENDAV12 = 0*RENDAV;

!AZEVEM;
[RAZ1] RENDAZ1 = 0*RENDAZ;
[RAZ2] RENDAZ2 = 0*RENDAZ;
[RAZ3] RENDAZ3 = 0*RENDAZ;
[RAZ4] RENDAZ4 = 0*RENDAZ;
[RAZ5] RENDAZ5 = 0*RENDAZ;
[RAZ6] RENDAZ6 = 0*RENDAZ;
[RAZ7] RENDAZ7 = .2*RENDAZ;
[RAZ8] RENDAZ8 = .3*RENDAZ;
[RAZ9] RENDAZ9 = .35*RENDAZ;
[RAZ10] RENDAZ10 = .15*RENDAZ;
[RAZ11] RENDAZ11 = 0*RENDAZ;
[RAZ12] RENDAZ12 = 0*RENDAZ;
```

```
!PESO ANIMAIS;
[PTER] PTERN = ((PV-PNASC)/(2*365))*(365/2);
[PNOVI] PNOV = ((PV-PNASC)/(2*365))*(365*1.5);

!INGESTAO/PV;
[CINGMS] CING = CID*30;

!NECESSIDADE DE ENERGIA DOS ANIMAIS;

[NECEVL] NECVL = (0.02134*PV+3.502)*30;
[NECET] NECT = (0.041366*PTERN+3.108333)*30;
[NECEN] NECN = (0.041366*PNOV+3.108333)*30;
[NECEVS] NECVS = NECVL*1.2;
```

Anexo 3

TITLE OTIMIZACAO DA PRODUCAO DE LEITE COM CENARIOS-– FOCO PERDA;

MAX = CEN;

[RMIN] MIN >= 40000;

Obs.: Todas as demais restrições deste modelo são iguais as do modelo anterior (anexo 2).

Anexo 4

TITLE OTIMIZACAO DA PRODUCAO DE LEITE - COMPLETO CENARIOS - HURWICS;

MAX = (1-H)*CEN + H*MIN;

H = 0.2;

Obs.: Todas as demais restrições deste modelo são iguais as do modelo anterior (anexo 2).

Anexo 5

```
TITLE MODELO FOCO PERDA - PEQUENO AGRICULTOR DO NOROESTE DO RS;

MAX = CEN;

CEN >= 0;
MIN >= -50000;
SOJA >= 0;
TRIGO >= 0;
LEITE >= 0;
VL >= 0;
!PRL >= 0;
POT >= 0;
TFT >= 0;
MT >= 0;
SOR >= 0;
AV >= 0;
AZ >= 0;
MSIL >= 0;
MG >= 0;
MGC >= 0;
R >= 0;
ENSILAD >= 0;

!PARAMETROS DE ENTRADA;

! SUPERFICIE E MAO-DE-OBRA DISPONIVEIS;
[SAUT] SAU = 10; ! HECTARES;
[WFAM] WF = 2; ! UNIDADES DE TRABALHO;
[UTMENSAL] UTM = 208; ! HORAS;

! SOJA;
[SAC_HA_SOJA] RENDSOJA = 40; ! SACOS DE 60 KG;
[PRECO_SOJA] PRESOJA = 30; ! R$/SACO;
[CVAR_HA_SOJA] CVSOJA = 600; ! R$/SACO;

! TRIGO;
[SAC_HA_TRIGO] RENDTRIGO = 20; ! SACOS DE 60 KG;
[PRECO_TRIGO] PRETRIGO = 18; ! R$/SACO;
[CVAR_HA_TRIGO] CVTRIGO = 250; ! R$/SACO;

! MILHO COMERCIAL;
[SAC_HA_MILHO] RENDMGC = 50; ! SACOS DE 60 KG;
[PRECO_MILHO] PREMGC = 16; ! R$/SACO;
[CVAR_HA_MILHO] CVMGC = 300; ! R$/SACO;

! LEITE;
```

```
[PRECO_LEITE] PRELEITE = 0.4; ! R$/LITRO;
[PRECO_VD] PREVD = 1.1; ! R$/KG DE PESO VIVO;
[CVAR_CAB_VL] CVVL = 20; !R$/CABECA;
[CVAR_CAB_VS] CVVS = 10; !R$/CABECA;
[CVAR_CAB_T] CVT = 15; !R$/CABECA;
[CVAR_CAB_N] CVN = 5; !R$/CABECA;
RVLVT = 0.7; !VACAS LACTACAO/TOTAL DE VACAS;
MORT = 0.03; ! PROPORCAO DO REBANHO;
!PRL <= 8;
!CRIA = 2 ANOS;
[RPOTAB] RENDPOT = 2000; !KG DE MATERIA SECA/HA;
[CVPOTR] CVPOT = 10; !R$/HA;
[RTFTAB] RENDTFT = 5000; !KG DE MATERIA SECA/HA;
[CVTFTE] CVTFT = 50; !R$/HA;
[RMTAB] RENDMT = 4000; !KG DE MATERIA SECA/HA;
[CVMTO] CVMT = 250; !R$/HA;
[RSORG] RENDSO = 4000; !KG DE MATERIA SECA/HA;
[CVSOR] CVSO = 250; !R$/HA;
[RAV1B] RENDAV = 3000; !KG DE MATERIA SECA/HA;
[CVAVE] CVAV = 200; !R$/HA;
[RAZAB] RENDAZ = 3000; !KG DE MATERIA SECA/HA;
[CVAZE] CVAZ = 100; !R$/HA;
[RMSIL] RENDMSIL = 8000; !KG DE MATERIA SECA/HA;
[CVMSILA] CVMSIL = 600;
[CF_ANO_ENSIL] CFSIL = 300;
[RMG] RENDMG = 50*60; !R$/HA;
[CV_MILHO_GRAO] CVMG = 400;
[CVRACAO] CVR = 0.6; !R$/KG;

! TEORES DE ENERGIA;
[ENPOT] EPOT = 1.7; !MEGACALORIAS METABOLIZAVEIS/KG DE MATERIA
SECA;
[ENTFT] ETFT = 1.8; !MEGACALORIAS METABOLIZAVEIS/KG DE MATERIA SECA;
[ENMT] EMT = 1.8; !MEGACALORIAS METABOLIZAVEIS/KG DE MATERIA SECA;
[ENSO] ESO = 1.8; !MEGACALORIAS METABOLIZAVEIS/KG DE MATERIA SECA;
[ENAV] EAV = 2; !MEGACALORIAS METABOLIZAVEIS/KG DE MATERIA SECA;
[ENAZ] EAZ = 2; !MEGACALORIAS METABOLIZAVEIS/KG DE MATERIA SECA;
[ERAC] ENRAC = 2.6; !MEGACALORIAS METABOLIZAVEIS/KG DE MATERIA
SECA;
[EMSIL] ENSIL = 2; !MEGACALORIAS METABOLIZAVEIS/KG DE MATERIA SECA;
[EMMG] ENMG = 3.2; !MEGACALORIAS METABOLIZAVEIS/KG DE MATERIA
SECA;

!TEORES DE PROTEINA;
[PRPOT] PPOT = 0.08; !KG DE PROTEINA BRUTA/KG DE MATERIA SECA;
[PRTFT] PTFT = .15; !KG DE PROTEINA BRUTA/KG DE MATERIA SECA;
[PRMT] PMT = .15; !KG DE PROTEINA BRUTA/KG DE MATERIA SECA;
[PRSO] PSO = .16; !KG DE PROTEINA BRUTA/KG DE MATERIA SECA;
[PRAV] PAV = .2; !KG DE PROTEINA BRUTA/KG DE MATERIA SECA;
```

```
[PRAZ] PAZ = .21; !KG DE PROTEINA BRUTA/KG DE MATERIA SECA;
[PRRAC] PRAC = .16; !KG DE PROTEINA BRUTA/KG DE MATERIA SECA;
[PRSIL] PSIL = .06; !KG DE PROTEINA BRUTA/KG DE MATERIA SECA;
[PRMG] PMG = 0.09; !KG DE PROTEINA BRUTA/KG DE MATERIA SECA;

! PESO VIVO E CAPACIDADE DE INGESTAO;
[PINIC] PNASC = 50; !KG DE PESO VIVO/CABECA;
[PVACA] PV = 500; !KG DE PESO VIVO/CABECA;
[CIDMS] CID = 0.03; !KG DE MATERIA SECA/KG DE PESO VIVO/DIA;

!PERDAS APARENTES DAS FORRAGENS;
[PPAPOTV] PAPOTV = 0.5;
[PPAPOTI] PAPOTI = 0.3;
[PPATFT] PATFT = 0.7;
[PPAMT] PAMT = 0.7;
[PPASOR] PASOR = 0.6;
[PPAAV] PAAV = 0.5;
[PPAZ] PAAZ = 0.4;
[PPAMSIL] PASIL = 0.8;
[PPMG] PAMG = 0.6;

! PERDAS DE RENDIMENTO DOS GRAOS;
[PSOJA] PRSOJA = 0.7;
[PTRIGO] PRTRIGO = 0.6;
[PMILHO] PRMGC = PAMG;

!PERDAS NOS PRECOS;
[PPL] PPLEITE = 0.75;
[PPSOJ] PPSOJA = 0.66;
[PPTRIG] PPTRIGO = 0.66;
[PPMILHO] PPMGC = 0.625;

! RENDIMENTO DAS PASTAGENS AO LONGO DO ANO;
[RPOT1] RENDPOT1 = .2*RENDPOT;
[RPOT2] RENDPOT2 = .1*RENDPOT;
[RPOT3] RENDPOT3 = .07*RENDPOT;
[RPOT4] RENDPOT4 = .05*RENDPOT;
[RPOT5] RENDPOT5 = .03*RENDPOT;
[RPOT6] RENDPOT6 = .02*RENDPOT;
[RPOT7] RENDPOT7 = .01*RENDPOT;
[RPOT8] RENDPOT8 = .02*RENDPOT;
[RPOT9] RENDPOT9 = .1*RENDPOT;
[RPOT10] RENDPOT10 = .1*RENDPOT;
[RPOT11] RENDPOT11 = .15*RENDPOT;
[RPOT12] RENDPOT12 = .15*RENDPOT;

[RTFT1] RENDTFT1 = .25*RENDTFT;
[RTFT2] RENDTFT2 = .15*RENDTFT;
[RTFT3] RENDTFT3 = .1*RENDTFT;
```

```
[RTFT4] RENDTFT4 = .1*RENDTFT;
[RTFT5] RENDTFT5 = 0*RENDTFT;
[RTFT6] RENDTFT6 = 0*RENDTFT;
[RTFT7] RENDTFT7 = 0*RENDTFT;
[RTFT8] RENDTFT8 = 0*RENDTFT;
[RTFT9] RENDTFT9 = .05*RENDTFT;
[RTFT10] RENDTFT10 = .1*RENDTFT;
[RTFT11] RENDTFT11 = .1*RENDTFT;
[RTFT12] RENDTFT12 = .15*RENDTFT;

[RMT1] RENDMT1 = .25*RENDMT;
[RMT2] RENDMT2 = .2*RENDMT;
[RMT3] RENDMT3 = .1*RENDMT;
[RMT4] RENDMT4 = .1*RENDMT;
[RMT5] RENDMT5 = .05*RENDMT;
[RMT6] RENDMT6 = 0*RENDMT;
[RMT7] RENDMT7 = 0*RENDMT;
[RMT8] RENDMT8 = 0*RENDMT;
[RMT9] RENDMT9 = 0*RENDMT;
[RMT10] RENDMT10 = .05*RENDMT;
[RMT11] RENDMT11 = .1*RENDMT;
[RMT12] RENDMT12 = .15*RENDSO;

[RSO1] RENDSO1 = .25*RENDSO;
[RSO2] RENDSO2 = .2*RENDSO;
[RSO3] RENDSO3 = .1*RENDSO;
[RSO4] RENDSO4 = .05*RENDSO;
[RSO5] RENDSO5 = 0*RENDSO;
[RSO6] RENDSO6 = 0*RENDSO;
[RSO7] RENDSO7 = 0*RENDSO;
[RSO8] RENDSO8 = 0*RENDSO;
[RSO9] RENDSO9 = .05*RENDSO;
[RSO10] RENDSO10 = .1*RENDSO;
[RSO11] RENDSO11 = .1*RENDSO;
[RSO12] RENDSO12 = .15*RENDSO;

[RAV1] RENDAV1 = 0*RENDAV;
[RAV2] RENDAV2 = 0*RENDAV;
[RAV3] RENDAV3 = 0*RENDAV;
[RAV4] RENDAV4 = 0*RENDAV;
[RAV5] RENDAV5 = 0*RENDAV;
[RAV6] RENDAV6 = .2*RENDAV;
[RAV7] RENDAV7 = .3*RENDAV;
[RAV8] RENDAV8 = .3*RENDAV;
[RAV9] RENDAV9 = .2*RENDAV;
[RAV10] RENDAV10 = 0*RENDAV;
[RAV11] RENDAV11 = 0*RENDAV;
[RAV12] RENDAV12 = 0*RENDAV;
```

[RAZ1] RENDAZ1 = 0*RENDAZ;
[RAZ2] RENDAZ2 = 0*RENDAZ;
[RAZ3] RENDAZ3 = 0*RENDAZ;
[RAZ4] RENDAZ4 = 0*RENDAZ;
[RAZ5] RENDAZ5 = 0*RENDAZ;
[RAZ6] RENDAZ6 = 0*RENDAZ;
[RAZ7] RENDAZ7 = .2*RENDAZ;
[RAZ8] RENDAZ8 = .3*RENDAZ;
[RAZ9] RENDAZ9 = .35*RENDAZ;
[RAZ10] RENDAZ10 = .15*RENDAZ;
[RAZ11] RENDAZ11 = 0*RENDAZ;
[RAZ12] RENDAZ12 = 0*RENDAZ;

! RESTRIÇÕES;

! CUSTO DE OPORTUNIDADE DO TRABALHO FAMILIAR;
[COPWF] MIN >= WF*400*13;@FREE(MIN);

!CENARIO DE SECA NO VERAO;
[CVER] ((RENDSOJA*PRESOJA*PRSOJA)-CVSOJA)*SOJA + ((RENDTRIGO*PRETRIGO)-CVTRIGO)*TRIGO + ((RENDMGC*PREMGC*(1-PRMGC))-CVMGC)*MGC + PRELEITE*LEITE + PREVD*PV*VD - CVVL*VL - CVVS*VS - CVT*T - CVN*N - CVPOT*POT - CVTFT*TFT - CVMT*MT - CVSO*SOR - CVAV*AV - CVAZ*AZ - CVR*R - CVMSIL*MSIL - CVMG*MG - (PRELEITE * (PLPOTV + PLTFT + PLMT + PLSOR + (ENSIL*RENDMSIL*MSILVLVER*PASIL)/1.15 + (ENMG*RENDMG*MGVL*PAMG)/1.15)) - CFSIL*ENSILAD - MIN >= 0;

!CENARIO DE PERDAS NO INVERNO;
[CINV] ((RENDSOJA*PRESOJA)-CVSOJA)*SOJA + ((RENDTRIGO*PRETRIGO*PRTRIGO)-CVTRIGO)*TRIGO + (RENDMGC*PREMGC-CVMGC)*MGC + PRELEITE*LEITE + PREVD*PV*VD - CVVL*VL - CVVS*VS - CVT*T - CVN*N - CVPOT*POT - CVTFT*TFT - CVMT*MT - CVSO*SOR - CVAV*AV - CVAZ*AZ - CVR*R - CVMSIL*MSIL - CVMG*MG - (PRELEITE * (PLPOTI + PLAV + PLAZ + (ENSIL*RENDMSIL/1.15)*MSILVLINV*PASIL)) - CFSIL*ENSILAD - MIN >= 0;

!CENARIO DE QUEDA NO PRECO DO LEITE;
[CPL] ((RENDSOJA*PRESOJA)-CVSOJA)*SOJA + ((RENDTRIGO*PRETRIGO)-CVTRIGO)*TRIGO + (RENDMGC*PREMGC-CVMGC)*MGC + PRELEITE*LEITE*PPLEITE + PREVD*PV*VD - CVVL*VL - CVVS*VS - CVT*T - CVN*N - CVPOT*POT - CVTFT*TFT - CVMT*MT - CVSO*SOR - CVAV*AV - CVAZ*AZ - CVR*R - CVMSIL*MSIL - CVMG*MG - CFSIL*ENSILAD - MIN >= 0;

!CENARIO DE QUEDA DO PRECO DA SOJA;
[CPS] ((RENDSOJA*PRESOJA*PPSOJA)-CVSOJA)*SOJA + ((RENDTRIGO*PRETRIGO)-CVTRIGO)*TRIGO + (RENDMGC*PREMGC-CVMGC)*MGC + PRELEITE*LEITE + PREVD*PV*VD - CVVL*VL - CVVS*VS - CVT*T - CVN*N - CVPOT*POT - CVTFT*TFT - CVMT*MT - CVSO*SOR - CVAV*AV - CVAZ*AZ - CVR*R - CVMSIL*MSIL - CVMG*MG - CFSIL*ENSILAD - MIN >= 0;

```
!CENARIO DE QUEDA DO PRECO DO TRIGO;
[CPT] ((RENDSOJA*PRESOJA)-CVSOJA)*SOJA +
((RENDTRIGO*PRETRIGO*PPTRIGO)-CVTRIGO)*TRIGO + (RENDMGC*PREMGC-
CVMGC)*MGC + PRELEITE*LEITE + PREVD*PV*VD - CVVL*VL - CVVS*VS -
CVT*T - CVN*N - CVPOT*POT - CVTFT*TFT - CVMT*MT - CVSO*SOR - CVAV*AV
- CVAZ*AZ - CVR*R - CVMSIL*MSIL - CVMG*MG - CFSIL*ENSILAD - MIN >= 0;

!CENARIO DE QUEDA DO PRECO DO MILHO COMERCIAL;
[CPM] ((RENDSOJA*PRESOJA)-CVSOJA)*SOJA + ((RENDTRIGO*PRETRIGO)-
CVTRIGO)*TRIGO + (RENDMGC*PREMGC*PPMGC-CVMGC)*MGC +
PRELEITE*LEITE + PREVD*PV*VD - CVVL*VL - CVVS*VS - CVT*T - CVN*N -
CVPOT*POT -  CVTFT*TFT - CVMT*MT - CVSO*SOR - CVAV*AV - CVAZ*AZ -
CVR*R - CVMSIL*MSIL - CVMG*MG - CFSIL*ENSILAD - MIN >= 0;

!CENARIO SEM PERDAS (SITUACAO NORMAL);
[CSP] ((RENDSOJA*PRESOJA)-CVSOJA)*SOJA + ((RENDTRIGO*PRETRIGO)-
CVTRIGO)*TRIGO + ((RENDMGC*PREMGC)-CVMGC)*MGC + PRELEITE*LEITE +
PREVD*PV*VD - CVVL*VL - CVVS*VS - CVT*T - CVN*N - CVPOT*POT -
CVTFT*TFT - CVMT*MT - CVSO*SOR - CVAV*AV - CVAZ*AZ - CVR*R -
CVMSIL*MSIL - CVMG*MG - CFSIL*ENSILAD = CEN;@FREE(CEN);


!SUPERFICIE AGRICOLA UTIL;
[SAUV] SOJA + POT + TFT + MT + SOR + MSIL + MG + MGC <= SAU;
[SAUI] TRIGO + POT + TFT + AV + AZ <= SAU;

!RESTRICOES DE TRABALHO;
[WFJAN] 10*VL + 6*MSIL <= WF*UTM;
[WFFEV] 10*VL <= WF*UTM;
[WFMAR] 10*VL + 4*MG + 5*MGC <= WF*UTM;
[WFABR] 4*SOJA + 10*VL + 2*AV <= WF*UTM;
[WFMAI] 10*VL + 2*AZ <= WF*UTM;
[WFJUN] 3*TRIGO + 10*VL <= WF*UTM;
[WFJUL] 10*VL <= WF*UTM;
[WFAGO] 10*VL + 2*SOR <= WF*UTM;
[WFSET] 10*VL + 2*MT +  TFT <= WF*UTM;
[WFOUT] 2*TRIGO + 10*VL + POT + 4*MSIL + 4*MG + 4*MGC <= WF*UTM;
[WFNOV] 5*SOJA + 10*VL <= WF*UTM;
[WFDEZ] 10*VL <= WF*UTM;

!ENERGIA PARA VACAS EM LACTACAO;

[EVL1]1.15*L1+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT1*POTVL1-ETFT*RENDTFT1*TFTVL1-
EMT*RENDMT1*MTVL1-ESO*RENDSO1*SOVL1-EAV*RENDAV1*AVVL1-
EAZ*RENDAZ1*AZVL1-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL1-ENMG*RENDMG*MGVL1-
ENRAC*RVL1<=0;
[EVL2]1.15*L2+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT2*POTVL2-ETFT*RENDTFT2*TFTVL2-
EMT*RENDMT2*MTVL2-ESO*RENDSO2*SOVL2-EAV*RENDAV2*AVVL2 -
```

EAZ*RENDAZ2*AZVL2-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL2-ENMG*RENDMG*MGVL2-ENRAC*RVL2 <=0;
[EVL3]1.15*L3+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT3*POTVL3-ETFT*RENDTFT3*TFTVL3-EMT*RENDMT3*MTVL3-ESO*RENDSO3*SOVL3-EAV*RENDAV3*AVVL3 -EAZ*RENDAZ3*AZVL3-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL3-ENMG*RENDMG*MGVL3-ENRAC*RVL3 <=0;
[EVL4]1.15*L4+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT4*POTVL4-ETFT*RENDTFT4*TFTVL4-EMT*RENDMT4*MTVL4- ESO*RENDSO4*SOVL4-EAV*RENDAV4*AVVL4 -EAZ*RENDAZ4*AZVL4-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL4-ENMG*RENDMG*MGVL4-ENRAC*RVL4 <=0;
[EVL5]1.15*L5+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT5*POTVL5-ETFT*RENDTFT5*TFTVL5-EMT*RENDMT5*MTVL5-ESO*RENDSO5*SOVL5-EAV*RENDAV5*AVVL5 -EAZ*RENDAZ5*AZVL5-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL5-ENMG*RENDMG*MGVL5-ENRAC*RVL5 <=0;
[EVL6]1.15*L6+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT6*POTVL6-ETFT*RENDTFT6*TFTVL6-EMT*RENDMT6*MTVL6-ESO*RENDSO6*SOVL6-EAV*RENDAV6*AVVL6-EAZ*RENDAZ6*AZVL6-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL6-ENMG*RENDMG*MGVL6-ENRAC*RVL6 <=0;
[EVL7]1.15*L7+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT7*POTVL7-ETFT*RENDTFT7*TFTVL7-EMT*RENDMT7*MTVL7-ESO*RENDSO7*SOVL7-EAV*RENDAV7*AVVL7-EAZ*RENDAZ7*AZVL7-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL7-ENMG*RENDMG*MGVL7-ENRAC*RVL7 <=0;
[EVL8]1.15*L8+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT8*POTVL8-ETFT*RENDTFT8*TFTVL8-EMT*RENDMT8*MTVL8-ESO*RENDSO8*SOVL8-EAV*RENDAV8*AVVL8-EAZ*RENDAZ8*AZVL8-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL8-ENMG*RENDMG*MGVL8-ENRAC*RVL8 <=0;
[EVL9]1.15*L9+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT9*POTVL9-ETFT*RENDTFT9*TFTVL9-EMT*RENDMT9*MTVL9-ESO*RENDSO9*SOVL9-EAV*RENDAV9*AVVL9-EAZ*RENDAZ9*AZVL9-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL9-ENMG*RENDMG*MGVL9-ENRAC*RVL9 <=0;
[EVL10]1.15*L10+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT10*POTVL10-ETFT*RENDTFT10*TFTVL10-EMT*RENDMT10*MTVL10-ESO*RENDSO10*SOVL10-EAV*RENDAV10*AVVL10-EAZ*RENDAZ10*AZVL10-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL10-ENMG*RENDMG*MGVL10-ENRAC*RVL10<=0;
[EVL11]1.15*L11+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT11*POTVL11-ETFT*RENDTFT11*TFTVL11-EMT*RENDMT11*MTVL11-ESO*RENDSO11*SOVL11-EAV*RENDAV11*AVVL10-EAZ*RENDAZ11*AZVL11-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL11-ENMG*RENDMG*MGVL11-ENRAC*RVL11<=0;
[EVL12]1.15*L12+NECVL*VL-EPOT*RENDPOT12*POTVL12-ETFT*RENDTFT12*TFTVL12-EMT*RENDMT12*MTVL12-ESO*RENDSO12*SOVL12-EAV*RENDAV12*AVVL10-EAZ*RENDAZ12*AZVL12-ENSIL*RENDMSIL*MSILVL12-ENMG*RENDMG*MGVL12-ENRAC*RVL12<=0;

!ENERGIA PARA O REBANHO (ANIMAIS NAO PRODUTIVOS);

[EREB1]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT1*POTREB1-ETFT*RENDTFT1*TFTREB1-EMT*RENDMT1*MTREB1-ESO*RENDSO1*SOREB1-EAV*RENDAV1*AVREB1-EAZ*RENDAZ1*AZREB1-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB1-ENMG*RENDMG*MGREB1-ENRAC*RREB1<=0;

[EREB2]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT2*POTREB2-
ETFT*RENDTFT2*TFTREB2-EMT*RENDMT2*MTREB2-ESO*RENDSO2*SOREB2-
EAV*RENDAV2*AVREB2 - EAZ*RENDAZ2*AZREB2-
ENSIL*RENDMSIL*MSILREB2-ENMG*RENDMG*MGREB2-ENRAC*RREB2 <=0;
[EREB3]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT3*POTREB3-
ETFT*RENDTFT3*TFTREB3-EMT*RENDMT3*MTREB3-ESO*RENDSO3*SOREB3-
EAV*RENDAV3*AVREB3 - EAZ*RENDAZ3*AZREB3-
ENSIL*RENDMSIL*MSILREB3-ENMG*RENDMG*MGREB3-ENRAC*RREB3 <=0;
[EREB4]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT4*POTREB4-
ETFT*RENDTFT4*TFTREB4-EMT*RENDMT4*MTREB4- ESO*RENDSO4*SOREB4-
EAV*RENDAV4*AVREB4 - EAZ*RENDAZ4*AZREB4-
ENSIL*RENDMSIL*MSILREB4-ENMG*RENDMG*MGREB4-ENRAC*RREB4 <=0;
[EREB5]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT5*POTREB5-
ETFT*RENDTFT5*TFTREB5-EMT*RENDMT5*MTREB5-ESO*RENDSO5*SOREB5-
EAV*RENDAV5*AVREB5 - EAZ*RENDAZ5*AZREB5-
ENSIL*RENDMSIL*MSILREB5-ENMG*RENDMG*MGREB5-ENRAC*RREB5 <=0;
[EREB6]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT6*POTREB6-
ETFT*RENDTFT6*TFTREB6-EMT*RENDMT6*MTREB6-ESO*RENDSO6*SOREB6-
EAV*RENDAV6*AVREB6-EAZ*RENDAZ6*AZREB6-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB6-
ENMG*RENDMG*MGREB6-ENRAC*RREB6 <=0;
[EREB7]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT7*POTREB7-
ETFT*RENDTFT7*TFTREB7-EMT*RENDMT7*MTREB7-ESO*RENDSO7*SOREB7-
EAV*RENDAV7*AVREB7-EAZ*RENDAZ7*AZREB7-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB7-
ENMG*RENDMG*MGREB7-ENRAC*RREB7 <=0;
[EREB8]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT8*POTREB8-
ETFT*RENDTFT8*TFTREB8-EMT*RENDMT8*MTREB8-ESO*RENDSO8*SOREB8-
EAV*RENDAV8*AVREB8-EAZ*RENDAZ8*AZREB8-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB8-
ENMG*RENDMG*MGREB8-ENRAC*RREB8 <=0;
[EREB9]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT9*POTREB9-
ETFT*RENDTFT9*TFTREB9-EMT*RENDMT9*MTREB9-ESO*RENDSO9*SOREB9-
EAV*RENDAV9*AVREB9-EAZ*RENDAZ9*AZREB9-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB9-
ENMG*RENDMG*MGREB9-ENRAC*RREB9 <=0;
[EREB10]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT10*POTREB10-
ETFT*RENDTFT10*TFTREB10-ESO*RENDSO10*SOREB10-
EMT*RENDMT10*MTREB10-EAV*RENDAV10*AVREB10-
EAZ*RENDAZ10*AZREB10-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB10-
ENMG*RENDMG*MGREB10-ENRAC*RREB10<=0;
[EREB11]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT11*POTREB11-
ETFT*RENDTFT11*TFTREB11-ESO*RENDSO11*SOREB11-
EMT*RENDMT11*MTREB11-EAV*RENDAV11*AVREB11-
EAZ*RENDAZ11*AZREB11-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB11-
ENMG*RENDMG*MGREB11-ENRAC*RREB11<=0;
[EREB12]NECVS*VS+NECT*T+NECN*N-EPOT*RENDPOT12*POTREB12-
ETFT*RENDTFT12*TFTREB12-ESO*RENDSO12*SOREB12-
EMT*RENDMT12*MTREB12-EAV*RENDAV12*AVREB12-
EAZ*RENDAZ12*AZREB12-ENSIL*RENDMSIL*MSILREB12-
ENMG*RENDMG*MGREB12-ENRAC*RREB12<=0;

!PROTEINA PARA VACAS EM LACTACAO;

[PVL1]0.084*L1+NECPVL*VL-PPOT*RENDPOT1*POTVL1-
PTFT*RENDTFT1*TFTVL1-PMT*RENDMT1*MTVL1-PSO*RENDSO1*SOVL1-
PAV*RENDAV1*AVVL1-PAZ*RENDAZ1*AZVL1-PSIL*RENDMSIL*MSILVL1-
PMG*RENDMG*MGVL1-PRAC*RVL1<=0;
[PVL2]0.084*L2+NECPVL*VL-PPOT*RENDPOT2*POTVL2-
PTFT*RENDTFT2*TFTVL2-PMT*RENDMT2*MTVL2-PSO*RENDSO2*SOVL2-
PAV*RENDAV2*AVVL2-PAZ*RENDAZ2*AZVL2-PSIL*RENDMSIL*MSILVL2-
PMG*RENDMG*MGVL2-PRAC*RVL2 <=0;
[PVL3]0.084*L3+NECPVL*VL-PPOT*RENDPOT3*POTVL3-
PTFT*RENDTFT3*TFTVL3-PMT*RENDMT3*MTVL3-PSO*RENDSO3*SOVL3-
PAV*RENDAV3*AVVL3-PAZ*RENDAZ3*AZVL3-PSIL*RENDMSIL*MSILVL3-
PMG*RENDMG*MGVL3-PRAC*RVL3 <=0;
[PVL4]0.084*L4+NECPVL*VL-PPOT*RENDPOT4*POTVL4-
PTFT*RENDTFT4*TFTVL4-PMT*RENDMT4*MTVL4- PSO*RENDSO4*SOVL4-
PAV*RENDAV4*AVVL4-PAZ*RENDAZ4*AZVL4-PSIL*RENDMSIL*MSILVL4-
PMG*RENDMG*MGVL4-PRAC*RVL4 <=0;
[PVL5]0.084*L5+NECPVL*VL-PPOT*RENDPOT5*POTVL5-
PTFT*RENDTFT5*TFTVL5-PMT*RENDMT5*MTVL5-PSO*RENDSO5*SOVL5-
PAV*RENDAV5*AVVL5-PAZ*RENDAZ5*AZVL5-PSIL*RENDMSIL*MSILVL5-
PMG*RENDMG*MGVL5-PRAC*RVL5 <=0;
[PVL6]0.084*L6+NECPVL*VL-PPOT*RENDPOT6*POTVL6-
PTFT*RENDTFT6*TFTVL6-PMT*RENDMT6*MTVL6-PSO*RENDSO6*SOVL6-
PAV*RENDAV6*AVVL6-PAZ*RENDAZ6*AZVL6-PSIL*RENDMSIL*MSILVL6-
PMG*RENDMG*MGVL6-PRAC*RVL6 <=0;
[PVL7]0.084*L7+NECPVL*VL-PPOT*RENDPOT7*POTVL7-
PTFT*RENDTFT7*TFTVL7-PMT*RENDMT7*MTVL7-PSO*RENDSO7*SOVL7-
PAV*RENDAV7*AVVL7-PAZ*RENDAZ7*AZVL7-PSIL*RENDMSIL*MSILVL7-
PMG*RENDMG*MGVL7-PRAC*RVL7 <=0;
[PVL8]0.084*L8+NECPVL*VL-PPOT*RENDPOT8*POTVL8-
PTFT*RENDTFT8*TFTVL8-PMT*RENDMT8*MTVL8-PSO*RENDSO8*SOVL8-
PAV*RENDAV8*AVVL8-PAZ*RENDAZ8*AZVL8-PSIL*RENDMSIL*MSILVL8-
PMG*RENDMG*MGVL8-PRAC*RVL8 <=0;
[PVL9]0.084*L9+NECPVL*VL-PPOT*RENDPOT9*POTVL9-
PTFT*RENDTFT9*TFTVL9-PMT*RENDMT9*MTVL9-PSO*RENDSO9*SOVL9-
PAV*RENDAV9*AVVL9-PAZ*RENDAZ9*AZVL9-PSIL*RENDMSIL*MSILVL9-
PMG*RENDMG*MGVL9-PRAC*RVL9 <=0;
[PVL10]0.084*L10+NECPVL*VL-PPOT*RENDPOT10*POTVL10-
PTFT*RENDTFT10*TFTVL10-PMT*RENDMT10*MTVL10-PSO*RENDSO10*SOVL10-
PAV*RENDAV10*AVVL10-PAZ*RENDAZ10*AZVL10-PSIL*RENDMSIL*MSILVL10-
PMG*RENDMG*MGVL10-PRAC*RVL10<=0;
[PVL11]0.084*L11+NECPVL*VL-PPOT*RENDPOT11*POTVL11-
PTFT*RENDTFT11*TFTVL11-PMT*RENDMT11*MTVL11-PSO*RENDSO11*SOVL11-
PAV*RENDAV11*AVVL10-PAZ*RENDAZ11*AZVL11-PSIL*RENDMSIL*MSILVL11-
PMG*RENDMG*MGVL11-PRAC*RVL11<=0;
[PVL12]0.084*L12+NECPVL*VL-PPOT*RENDPOT12*POTVL12-
PTFT*RENDTFT12*TFTVL12-PMT*RENDMT12*MTVL12-PSO*RENDSO12*SOVL12-
PAV*RENDAV12*AVVL10-PAZ*RENDAZ12*AZVL12-PSIL*RENDMSIL*MSILVL12-
PMG*RENDMG*MGVL12-PRAC*RVL12<=0;

! PROTEINA PARA O REBANHO (ANIMAIS NAO PRODUTIVOS);

[PREB1]NECPVS*VS+NECPT*T+NECPN*N-PPOT*RENDPOT1*POTREB1-PTFT*RENDTFT1*TFTREB1-PMT*RENDMT1*MTREB1-PSO*RENDSO1*SOREB1-PAV*RENDAV1*AVREB1-PAZ*RENDAZ1*AZREB1-PSIL*RENDMSIL*MSILREB1-PMG*RENDMG*MGREB1-PRAC*RREB1<=0;
[PREB2]NECPVS*VS+NECPT*T+NECPN*N-PPOT*RENDPOT2*POTREB2-PTFT*RENDTFT2*TFTREB2-PMT*RENDMT2*MTREB2-PSO*RENDSO2*SOREB2-PAV*RENDAV2*AVREB2 - PAZ*RENDAZ2*AZREB2-PSIL*RENDMSIL*MSILREB2-PMG*RENDMG*MGREB2-PRAC*RREB2 <=0;
[PREB3]NECPVS*VS+NECPT*T+NECPN*N-PPOT*RENDPOT3*POTREB3-PTFT*RENDTFT3*TFTREB3-PMT*RENDMT3*MTREB3-PSO*RENDSO3*SOREB3-PAV*RENDAV3*AVREB3 - PAZ*RENDAZ3*AZREB3-PSIL*RENDMSIL*MSILREB3-PMG*RENDMG*MGREB3-PRAC*RREB3 <=0;
[PREB4]NECPVS*VS+NECPT*T+NECPN*N-PPOT*RENDPOT4*POTREB4-PTFT*RENDTFT4*TFTREB4-PMT*RENDMT4*MTREB4- PSO*RENDSO4*SOREB4-PAV*RENDAV4*AVREB4 - PAZ*RENDAZ4*AZREB4-PSIL*RENDMSIL*MSILREB4-PMG*RENDMG*MGREB4-PRAC*RREB4 <=0;
[PREB5]NECPVS*VS+NECPT*T+NECPN*N-PPOT*RENDPOT5*POTREB5-PTFT*RENDTFT5*TFTREB5-PMT*RENDMT5*MTREB5-PSO*RENDSO5*SOREB5-PAV*RENDAV5*AVREB5 - PAZ*RENDAZ5*AZREB5-PSIL*RENDMSIL*MSILREB5-PMG*RENDMG*MGREB5-PRAC*RREB5 <=0;
[PREB6]NECPVS*VS+NECPT*T+NECPN*N-PPOT*RENDPOT6*POTREB6-PTFT*RENDTFT6*TFTREB6-PMT*RENDMT6*MTREB6-PSO*RENDSO6*SOREB6-PAV*RENDAV6*AVREB6-PAZ*RENDAZ6*AZREB6-PSIL*RENDMSIL*MSILREB6-PMG*RENDMG*MGREB6-PRAC*RREB6 <=0;
[PREB7]NECPVS*VS+NECPT*T+NECPN*N-PPOT*RENDPOT7*POTREB7-PTFT*RENDTFT7*TFTREB7-PMT*RENDMT7*MTREB7-PSO*RENDSO7*SOREB7-PAV*RENDAV7*AVREB7-PAZ*RENDAZ7*AZREB7-PSIL*RENDMSIL*MSILREB7-PMG*RENDMG*MGREB7-PRAC*RREB7 <=0;
[PREB8]NECPVS*VS+NECPT*T+NECPN*N-PPOT*RENDPOT8*POTREB8-PTFT*RENDTFT8*TFTREB8-PMT*RENDMT8*MTREB8-PSO*RENDSO8*SOREB8-PAV*RENDAV8*AVREB8-PAZ*RENDAZ8*AZREB8-PSIL*RENDMSIL*MSILREB8-PMG*RENDMG*MGREB8-PRAC*RREB8 <=0;
[PREB9]NECPVS*VS+NECPT*T+NECPN*N-PPOT*RENDPOT9*POTREB9-PTFT*RENDTFT9*TFTREB9-PMT*RENDMT9*MTREB9-PSO*RENDSO9*SOREB9-PAV*RENDAV9*AVREB9-PAZ*RENDAZ9*AZREB9-PSIL*RENDMSIL*MSILREB9-PMG*RENDMG*MGREB9-PRAC*RREB9 <=0;
[PREB10]NECPVS*VS+NECPT*T+NECPN*N-PPOT*RENDPOT10*POTREB10-PTFT*RENDTFT10*TFTREB10-PSO*RENDSO10*SOREB10-PMT*RENDMT10*MTREB10-PAV*RENDAV10*AVREB10-PAZ*RENDAZ10*AZREB10-PSIL*RENDMSIL*MSILREB10-PMG*RENDMG*MGREB10-PRAC*RREB10<=0;
[PREB11]NECPVS*VS+NECPT*T+NECPN*N-PPOT*RENDPOT11*POTREB11-PTFT*RENDTFT11*TFTREB11-PSO*RENDSO11*SOREB11-PMT*RENDMT11*MTREB11-PAV*RENDAV11*AVREB11-PAZ*RENDAZ11*AZREB11-PSIL*RENDMSIL*MSILREB11-PMG*RENDMG*MGREB11-PRAC*RREB11<=0;

[PREB12]NECPVS*VS+NECPT*T+NECPN*N-PPOT*RENDPOT12*POTREB12-PTFT*RENDTFT12*TFTREB12-PSO*RENDSO12*SOREB12-PMT*RENDMT12*MTREB12-PAV*RENDAV12*AVREB12-PAZ*RENDAZ12*AZREB12-PSIL*RENDMSIL*MSILREB12-PMG*RENDMG*MGREB12-PRAC*RREB12<=0;

!INGESTAO DAS VACAS EM LACTACAO;

[IVL1] CING*PV*VL-RENDPOT1*POTVL1-RENDTFT1*TFTVL1-RENDMT1*MTVL1-RENDAV1*AVVL1-RENDSO1*SOVL1-RENDAZ1*AZVL1-RENDMSIL*MSILVL1-RENDMG*MGVL1-RVL1>=0;
[IVL2] CING*PV*VL-RENDPOT2*POTVL2-RENDTFT2*TFTVL2-RENDMT2*MTVL2-RENDAV2*AVVL2 -RENDSO2*SOVL2- RENDAZ2*AZVL2-RENDMSIL*MSILVL2-RENDMG*MGVL2-RVL2 >=0;
[IVL3] CING*PV*VL-RENDPOT3*POTVL3-RENDTFT3*TFTVL3-RENDMT3*MTVL3-RENDAV3*AVVL3 -RENDSO3*SOVL3- RENDAZ3*AZVL3-RENDMSIL*MSILVL3-RENDMG*MGVL3-RVL3 >=0;
[IVL4] CING*PV*VL-RENDPOT4*POTVL4-RENDTFT4*TFTVL4-RENDMT4*MTVL4-RENDAV4*AVVL4 -RENDSO4*SOVL4- RENDAZ4*AZVL4-RENDMSIL*MSILVL4-RENDMG*MGVL4-RVL4 >=0;
[IVL5] CING*PV*VL-RENDPOT5*POTVL5-RENDTFT5*TFTVL5-RENDMT5*MTVL5-RENDAV5*AVVL5 -RENDSO5*SOVL5- RENDAZ5*AZVL5-RENDMSIL*MSILVL5-RENDMG*MGVL5-RVL5 >=0;
[IVL6] CING*PV*VL-RENDPOT6*POTVL6-RENDTFT6*TFTVL6-RENDMT6*MTVL6-RENDAV6*AVVL6-RENDSO6*SOVL6-RENDAZ6*AZVL6-RENDMSIL*MSILVL6-RENDMG*MGVL6-RVL6 >=0;
[IVL7] CING*PV*VL-RENDPOT7*POTVL7-RENDTFT7*TFTVL7-RENDMT7*MTVL7-RENDAV7*AVVL7-RENDSO7*SOVL7-RENDAZ7*AZVL7-RENDMSIL*MSILVL7-RENDMG*MGVL7-RVL7 >=0;
[IVL8] CING*PV*VL-RENDPOT8*POTVL8-RENDTFT8*TFTVL8-RENDMT8*MTVL8-RENDAV8*AVVL8-RENDSO8*SOVL8-RENDAZ8*AZVL8-RENDMSIL*MSILVL8-RENDMG*MGVL8-RVL8 >=0;
[IVL9] CING*PV*VL-RENDPOT9*POTVL9-RENDTFT9*TFTVL9-RENDMT9*MTVL9-RENDAV9*AVVL9-RENDSO9*SOVL9-RENDAZ9*AZVL9-RENDMSIL*MSILVL9-RENDMG*MGVL9-RVL9 >=0;
[IVL10] CING*PV*VL-RENDPOT10*POTVL10-RENDTFT10*TFTVL10-RENDMT10*MTVL10-RENDAV10*AVVL10-RENDSO10*SOVL10-RENDAZ10*AZVL10-RENDMSIL*MSILVL10-RENDMG*MGVL10-RVL10>=0;
[IVL11] CING*PV*VL-RENDPOT11*POTVL11-RENDTFT11*TFTVL11-RENDMT11*MTVL11-RENDAV11*AVVL11-RENDSO11*SOVL11-RENDAZ11*AZVL11-RENDMSIL*MSILVL11-RENDMG*MGVL11-RVL11>=0;
[IVL12] CING*PV*VL-RENDPOT12*POTVL12-RENDTFT12*TFTVL12-RENDMT12*MTVL12-RENDAV12*AVVL12-RENDSO12*SOVL12-RENDAZ12*AZVL12-RENDMSIL*MSILVL12-RENDMG*MGVL12-RVL12>=0;

!INGESTAO DO REBANHO (ANIMAIS NAO PRODUTIVOS);

[IREB1] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT1*POTREB1-RENDTFT1*TFTREB1-RENDSO1*SOREB1-RENDMT1*MTREB1-RENDAV1*AVREB1-RENDAZ1*AZREB1-RENDMSIL*MSILREB1-RENDMG*MGREB1-RREB1>=0;
[IREB2] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT2*POTREB2-RENDTFT2*TFTREB2-RENDSO2*SOREB2-RENDMT2*MTREB2-RENDAV2*AVREB2 - RENDAZ2*AZREB2-RENDMSIL*MSILREB2-RENDMG*MGREB2-RREB2 >=0;
[IREB3] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT3*POTREB3-RENDTFT3*TFTREB3-RENDSO3*SOREB3-RENDMT3*MTREB3-RENDAV3*AVREB3 - RENDAZ3*AZREB3-RENDMSIL*MSILREB3-RENDMG*MGREB3-RREB3 >=0;
[IREB4] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT4*POTREB4-RENDTFT4*TFTREB4-RENDSO4*SOREB4-RENDMT4*MTREB4-RENDAV4*AVREB4 - RENDAZ4*AZREB4-RENDMSIL*MSILREB4-RENDMG*MGREB4-RREB4 >=0;
[IREB5] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT5*POTREB5-RENDTFT5*TFTREB5-RENDSO5*SOREB5-RENDMT5*MTREB5-RENDAV5*AVREB5 - RENDAZ5*AZREB5-RENDMSIL*MSILREB5-RENDMG*MGREB5-RREB5 >=0;
[IREB6] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT6*POTREB6-RENDTFT6*TFTREB6-RENDSO6*SOREB6-RENDMT6*MTREB6-RENDAV6*AVREB6-RENDAZ6*AZREB6-RENDMSIL*MSILREB6-RENDMG*MGREB6-RREB6 >=0;
[IREB7] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT7*POTREB7-RENDTFT7*TFTREB7-RENDSO7*SOREB7-RENDMT7*MTREB7-RENDAV7*AVREB7-RENDAZ7*AZREB7-RENDMSIL*MSILREB7-RENDMG*MGREB7-RREB7 >=0;
[IREB8] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT8*POTREB8-RENDTFT8*TFTREB8-RENDSO8*SOREB8-RENDMT8*MTREB8-RENDAV8*AVREB8-RENDAZ8*AZREB8-RENDMSIL*MSILREB8-RENDMG*MGREB8-RREB8 >=0;
[IREB9] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT9*POTREB9-RENDTFT9*TFTREB9-RENDSO9*SOREB9-RENDMT9*MTREB9-RENDAV9*AVREB9-RENDAZ9*AZREB9-RENDMSIL*MSILREB9-RENDMG*MGREB9-RREB9 >=0;
[IREB10] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT10*POTREB10-RENDTFT10*TFTREB10-RENDSO10*SOREB10-RENDMT10*MTREB10-RENDAV10*AVREB10-RENDAZ10*AZREB10-RENDMSIL*MSILREB10-RENDMG*MGREB10-RREB10>=0;
[IREB11] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT11*POTREB11-RENDTFT11*TFTREB11-RENDSO11*SOREB11-RENDMT11*MTREB11-RENDAV11*AVREB11-RENDAZ11*AZREB11-RENDMSIL*MSILREB11-RENDMG*MGREB11-RREB11>=0;
[IREB12] CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N-RENDPOT12*POTREB12-RENDTFT12*TFTREB12-RENDSO12*SOREB12-RENDMT12*MTREB12-RENDAV12*AVREB12-RENDAZ12*AZREB12-RENDMSIL*MSILREB12-RENDMG*MGREB12-RREB12>=0;

!INGESTAO DE VOLUMOSOS DAS VACAS EM LACTACAO;

[VOLVL1] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT1*POTVL1-RENDTFT1*TFTVL1-
RENDMT1*MTVL1-RENDAV1*AVVL1-RENDMSIL*MSILVL1-RENDAZ1*AZVL1-
RENDSO1*SOVL1 <=0;
[VOLVL2] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT2*POTVL2-RENDTFT2*TFTVL2-
RENDMT2*MTVL2-RENDAV2*AVVL2-RENDMSIL*MSILVL2 - RENDAZ2*AZVL2-
RENDSO2*SOVL2 <=0;
[VOLVL3] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT3*POTVL3-RENDTFT3*TFTVL3-
RENDMT3*MTVL3-RENDAV3*AVVL3-RENDMSIL*MSILVL3 - RENDAZ3*AZVL3-
RENDSO3*SOVL3 <=0;
[VOLVL4] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT4*POTVL4-RENDTFT4*TFTVL4-
RENDMT4*MTVL4- RENDAV4*AVVL4-RENDMSIL*MSILVL4 - RENDAZ4*AZVL4-
RENDSO4*SOVL4 <=0;
[VOLVL5] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT5*POTVL5-RENDTFT5*TFTVL5-
RENDMT5*MTVL5-RENDAV5*AVVL5-RENDMSIL*MSILVL5 - RENDAZ5*AZVL5-
RENDSO5*SOVL5 <=0;
[VOLVL6] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT6*POTVL6-RENDTFT6*TFTVL6-
RENDMT6*MTVL6-RENDAV6*AVVL6-RENDMSIL*MSILVL6-RENDAZ6*AZVL6-
RENDSO6*SOVL6 <=0;
[VOLVL7] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT7*POTVL7-RENDTFT7*TFTVL7-
RENDMT7*MTVL7-RENDAV7*AVVL7-RENDMSIL*MSILVL7-RENDAZ7*AZVL7-
RENDSO7*SOVL7 <=0;
[VOLVL8] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT8*POTVL8-RENDTFT8*TFTVL8-
RENDMT8*MTVL8-RENDAV8*AVVL8-RENDMSIL*MSILVL8-RENDAZ8*AZVL8-
RENDSO8*SOVL8 <=0;
[VOLVL9] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT9*POTVL9-RENDTFT9*TFTVL9-
RENDMT9*MTVL9-RENDAV9*AVVL9-RENDMSIL*MSILVL9-RENDAZ9*AZVL9-
RENDSO9*SOVL9 <=0;
[VOLVL10] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT10*POTVL10-RENDTFT10*TFTVL10-
RENDMT10*MTVL10-RENDMSIL*MSILVL10-RENDAV10*AVVL10-
RENDAZ10*AZVL10-RENDSO10*SOVL10 <=0;
[VOLVL11] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT11*POTVL11-RENDTFT11*TFTVL11-
RENDMT11*MTVL11-RENDMSIL*MSILVL11-RENDAV11*AVVL11-
RENDAZ11*AZVL11-RENDSO11*SOVL11 <=0;
[VOLVL12] 0.5*CING*PV*VL-RENDPOT12*POTVL12-RENDTFT12*TFTVL12-
RENDMT12*MTVL12-RENDMSIL*MSILVL12-RENDAV12*AVVL12-
RENDAZ12*AZVL12-RENDSO12*SOVL12 <=0;

!INGESTAO DE VOLUMOSOS DO REBANHO (ANIMAIS NAO PRODUTIVOS);

[VOLREB1] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT1*POTREB1-RENDTFT1*TFTREB1-RENDMT1*MTREB1-
RENDAV1*AVREB1-RENDMSIL*MSILREB1-RENDAZ1*AZREB1-
RENDSO1*SOREB1 <=0;

[VOLREB2] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT2*POTREB2-RENDTFT2*TFTREB2-RENDMT2*MTREB2-
RENDAV2*AVREB2-RENDMSIL*MSILREB2 - RENDAZ2*AZREB2-
RENDSO2*SOREB2 <=0;

```
[VOLREB3] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT3*POTREB3-RENDTFT3*TFTREB3-RENDMT3*MTREB3-
RENDAV3*AVREB3-RENDMSIL*MSILREB3 - RENDAZ3*AZREB3-
RENDSO3*SOREB3 <=0;
[VOLREB4] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT4*POTREB4-RENDTFT4*TFTREB4-RENDMT4*MTREB4-
RENDAV4*AVREB4-RENDMSIL*MSILREB4 - RENDAZ4*AZREB4-
RENDSO4*SOREB4 <=0;
[VOLREB5] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT5*POTREB5-RENDTFT5*TFTREB5-RENDMT5*MTREB5-
RENDAV5*AVREB5-RENDMSIL*MSILREB5 - RENDAZ5*AZREB5-
RENDSO5*SOREB5 <=0;
[VOLREB6] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT6*POTREB6-RENDTFT6*TFTREB6-RENDMT6*MTREB6-
RENDAV6*AVREB6-RENDMSIL*MSILREB6-RENDAZ6*AZREB6-
RENDSO6*SOREB6 <=0;
[VOLREB7] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT7*POTREB7-RENDTFT7*TFTREB7-RENDMT7*MTREB7-
RENDAV7*AVREB7-RENDMSIL*MSILREB7-RENDAZ7*AZREB7-
RENDSO7*SOREB7 <=0;
[VOLREB8] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT8*POTREB8-RENDTFT8*TFTREB8-RENDMT8*MTREB8-
RENDAV8*AVREB8-RENDMSIL*MSILREB8-RENDAZ8*AZREB8-
RENDSO8*SOREB8 <=0;
[VOLREB9] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT9*POTREB9-RENDTFT9*TFTREB9-RENDMT9*MTREB9-
RENDAV9*AVREB9-RENDMSIL*MSILREB9-RENDAZ9*AZREB9-
RENDSO9*SOREB9 <=0;
[VOLREB10] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT10*POTREB10-RENDTFT10*TFTREB10-RENDMT10*MTREB10-
RENDAV10*AVREB10-RENDMSIL*MSILREB10-RENDAZ10*AZREB10-
RENDSO10*SOREB10 <=0;
[VOLREB11] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT11*POTREB11-RENDTFT11*TFTREB11-RENDMT11*MTREB11-
RENDAV11*AVREB11-RENDMSIL*MSILREB11-RENDAZ11*AZREB11-
RENDSO11*SOREB11 <=0;
[VOLREB12] 0.5*(CING*PV*VS+CING*PTERN*T+CING*PNOV*N)-
RENDPOT12*POTREB12-RENDTFT12*TFTREB12-RENDMT12*MTREB12-
RENDAV12*AVREB12-RENDMSIL*MSILREB12-RENDAZ12*AZREB12-
RENDSO12*SOREB12 <=0;

! CONSUMO E SOBRA DE PASTAGENS EM CADA MES;

! POTREIRO;
[POT1] POTVL1 + POTREB1 - POTS1 - POT <= 0;
[POT2] POTVL2 + POTREB2 + POTS2 - POT <= 0;
[POT3] POTVL3 + POTREB3 + POTS3 - POT <= 0;
[POT4] POTVL4 + POTREB4 + POTS4 - POT <= 0;
[POT5] POTVL5 + POTREB5 + POTS5 - POT <= 0;
```

```
[POT6] POTVL6 + POTREB6 + POTS6 - POT <= 0;
[POT7] POTVL7 + POTREB7 + POTS7 - POT <= 0;
[POT8] POTVL8 + POTREB8 + POTS8 - POT <= 0;
[POT9] POTVL9 + POTREB9 + POTS9 - POT <= 0;
[POT10] POTVL10 + POTREB10 + POTS10 - POT <= 0;
[POT11] POTVL11 + POTREB11 + POTS11 - POT <= 0;
[POT112] POTVL12 + POTREB12 + POTS12 - POT <= 0;

! TIFTON;
[TFT1] TFTVL1 + TFTREB1 + TFTS1 - TFT <= 0;
[TFT2] TFTVL2 + TFTREB2 + TFTS2 - TFT <= 0;
[TFT3] TFTVL3 + TFTREB3 + TFTS3 - TFT <= 0;
[TFT4] TFTVL4 + TFTREB4 + TFTS4 - TFT <= 0;
[TFT5] TFTVL5 + TFTREB5 + TFTS5 - TFT <= 0;
[TFT6] TFTVL6 + TFTREB6 + TFTS6 - TFT <= 0;
[TFT7] TFTVL7 + TFTREB7 + TFTS7 - TFT <= 0;
[TFT8] TFTVL8 + TFTREB8 + TFTS8 - TFT <= 0;
[TFT9] TFTVL9 + TFTREB9 + TFTS9 - TFT <= 0;
[TFT10] TFTVL10 + TFTREB10 + TFTS10 - TFT <= 0;
[TFT11] TFTVL11 + TFTREB11 + TFTS11 - TFT <= 0;
[TFT12] TFTVL12 + TFTREB12 + TFTS12 - TFT <= 0;

! MILHETO;
[MT1] MTVL1 + MTREB1 + MTS1 - MT <= 0;
[MT2] MTVL2 + MTREB2 + MTS2 - MT <= 0;
[MT3] MTVL3 + MTREB3 + MTS3 - MT <= 0;
[MT4] MTVL4 + MTREB4 + MTS4 - MT <= 0;
[MT5] MTVL5 + MTREB5 + MTS5 - MT <= 0;
[MT6] MTVL6 + MTREB6 + MTS6 - MT <= 0;
[MT7] MTVL7 + MTREB7 + MTS7 - MT <= 0;
[MT8] MTVL8 + MTREB8 + MTS8 - MT <= 0;
[MT9] MTVL9 + MTREB9 + MTS9 - MT <= 0;
[MT10] MTVL10 + MTREB10 + MTS10 - MT <= 0;
[MT11] MTVL11 + MTREB11 + MTS11 - MT <= 0;
[MT12] MTVL12 + MTREB12 + MTS12 - MT <= 0;

! SORGO;
[SO1] SOVL1 + SOREB1 + SORS1 - SOR <= 0;
[SO2] SOVL2 + SOREB2 + SORS2 - SOR <= 0;
[SO3] SOVL3 + SOREB3 + SORS3 - SOR <= 0;
[SO4] SOVL4 + SOREB4 + SORS4 - SOR <= 0;
[SO5] SOVL5 + SOREB5 + SORS5 - SOR <= 0;
[SO6] SOVL6 + SOREB6 + SORS6 - SOR <= 0;
[SO7] SOVL7 + SOREB7 + SORS7 - SOR <= 0;
[SO8] SOVL8 + SOREB8 + SORS8 - SOR <= 0;
[SO9] SOVL9 + SOREB9 + SORS9 - SOR <= 0;
[SO10] SOVL10 + SOREB10 + SORS10 - SOR <= 0;
[SO11] SOVL11 + SOREB11 + SORS11 - SOR <= 0;
[SO12] SOVL12 + SOREB12 + SORS12 - SOR <= 0;
```

```
! AVEIA;
[AV1] AVVL1 + AVREB1 + AVS1 - AV <= 0;
[AV2] AVVL2 + AVREB2 + AVS2 - AV <= 0;
[AV3] AVVL3 + AVREB3 + AVS3 - AV <= 0;
[AV4] AVVL4 + AVREB4 + AVS4 - AV <= 0;
[AV5] AVVL5 + AVREB5 + AVS5 - AV <= 0;
[AV6] AVVL6 + AVREB6 + AVS6 - AV <= 0;
[AV7] AVVL7 + AVREB7 + AVS7 - AV <= 0;
[AV8] AVVL8 + AVREB8 + AVS8 - AV <= 0;
[AV9] AVVL9 + AVREB9 + AVS9 - AV <= 0;
[AV10] AVVL10 + AVREB10 + AVS10 - AV <= 0;
[AV11] AVVL11 + AVREB11 + AVS11 - AV <= 0;
[AV12] AVVL12 + AVREB12 + AVS12 - AV <= 0;

! AZEVEM;
[AZ1] AZVL1 + AZREB1 + AZS1 - AZ <= 0;
[AZ2] AZVL2 + AZREB2 + AZS2 - AZ <= 0;
[AZ3] AZVL3 + AZREB3 + AZS3 - AZ <= 0;
[AZ4] AZVL4 + AZREB4 + AZS4 - AZ <= 0;
[AZ5] AZVL5 + AZREB5 + AZS5 - AZ <= 0;
[AZ6] AZVL6 + AZREB6 + AZS6 - AZ <= 0;
[AZ7] AZVL7 + AZREB7 + AZS7 - AZ <= 0;
[AZ8] AZVL8 + AZREB8 + AZS8 - AZ <= 0;
[AZ9] AZVL9 + AZREB9 + AZS9 - AZ <= 0;
[AZ10] AZVL10 + AZREB10 + AZS10 - AZ <= 0;
[AZ11] AZVL11 + AZREB11 + AZS11 - AZ <= 0;
[AZ12] AZVL12 + AZREB12 + AZS12 - AZ <= 0;

! PERDAS EFETIVAS DE PASTO;

! POTREIRO;
[PPPOT1] POT*PAPOTV - POTS1 - PEFPOT1 <= 0;
[PPPOT2] POT*PAPOTV - POTS2 - PEFPOT2 <= 0;
[PPPOT3] POT*PAPOTV - POTS3 - PEFPOT3 <= 0;
[PPPOT4] POT*PAPOTV - POTS4 - PEFPOT4 <= 0;
[PPPOT5] POT*PAPOTI - POTS5 - PEFPOT5 <= 0;
[PPPOT6] POT*PAPOTI - POTS6 - PEFPOT6 <= 0;
[PPPOT7] POT*PAPOTI - POTS7 - PEFPOT7 <= 0;
[PPPOT8] POT*PAPOTI - POTS8 - PEFPOT8 <= 0;
[PPPOT9] POT*PAPOTI - POTS9 - PEFPOT9 <= 0;
[PPPOT10] POT*PAPOTV - POTS10 - PEFPOT10 <= 0;
[PPPOT11] POT*PAPOTV - POTS11 - PEFPOT11 <= 0;
[PPPOT12] POT*PAPOTV - POTS12 - PEFPOT12 <= 0;

! TIFTON;
[PPTFT1] TFT*PATFT - TFTS1 - PEFTFT1 <= 0;
[PPTFT2] TFT*PATFT - TFTS2 - PEFTFT2 <= 0;
[PPTFT3] TFT*PATFT - TFTS3 - PEFTFT3 <= 0;
```

```
[PPTFT4] TFT*PATFT - TFTS4 - PEFTFT4 <= 0;
[PPTFT5] TFT*PATFT - TFTS5 - PEFTFT5 <= 0;
[PPTFT6] TFT*PATFT - TFTS6 - PEFTFT6 <= 0;
[PPTFT7] TFT*PATFT - TFTS7 - PEFTFT7 <= 0;
[PPTFT8] TFT*PATFT - TFTS8 - PEFTFT8 <= 0;
[PPTFT9] TFT*PATFT - TFTS9 - PEFTFT9 <= 0;
[PPTFT10] TFT*PATFT - TFTS10 - PEFTFT10 <= 0;
[PPTFT11] TFT*PATFT - TFTS11 - PEFTFT11 <= 0;
[PPTFT12] TFT*PATFT - TFTS12 - PEFTFT12 <= 0;

! MILHETO;
[PPMT1] MT*PAMT - MTS1 - PEFMT1 <= 0;
[PPMT2] MT*PAMT - MTS2 - PEFMT2 <= 0;
[PPMT3] MT*PAMT - MTS3 - PEFMT3 <= 0;
[PPMT4] MT*PAMT - MTS4 - PEFMT4 <= 0;
[PPMT5] MT*PAMT - MTS5 - PEFMT5 <= 0;
[PPMT6] MT*PAMT - MTS6 - PEFMT6 <= 0;
[PPMT7] MT*PAMT - MTS7 - PEFMT7 <= 0;
[PPMT8] MT*PAMT - MTS8 - PEFMT8 <= 0;
[PPMT9] MT*PAMT - MTS9 - PEFMT9 <= 0;
[PPMT10] MT*PAMT - MTS10 - PEFMT10 <= 0;
[PPMT11] MT*PAMT - MTS11 - PEFMT11 <= 0;
[PPMT12] MT*PAMT - MTS12 - PEFMT12 <= 0;

! SORGO;
[PPSO1] SOR*PASOR - SORS1 - PEFSOR1 <= 0;
[PPSO2] SOR*PASOR - SORS2 - PEFSOR2 <= 0;
[PPSO3] SOR*PASOR - SORS3 - PEFSOR3 <= 0;
[PPSO4] SOR*PASOR - SORS4 - PEFSOR4 <= 0;
[PPSO5] SOR*PASOR - SORS5 - PEFSOR5 <= 0;
[PPSO6] SOR*PASOR - SORS6 - PEFSOR6 <= 0;
[PPSO7] SOR*PASOR - SORS7 - PEFSOR7 <= 0;
[PPSO8] SOR*PASOR - SORS8 - PEFSOR8 <= 0;
[PPSO9] SOR*PASOR - SORS9 - PEFSOR9 <= 0;
[PPSO10] SOR*PASOR - SORS10 - PEFSOR10 <= 0;
[PPSO11] SOR*PASOR - SORS11 - PEFSOR11 <= 0;
[PPSO12] SOR*PASOR - SORS12 - PEFSOR12 <= 0;

! AVEIA;
[PPAV1] AV*PAAV - AVS1 - PEFAV1 <= 0;
[PPAV2] AV*PAAV - AVS2 - PEFAV2 <= 0;
[PPAV3] AV*PAAV - AVS3 - PEFAV3 <= 0;
[PPAV4] AV*PAAV - AVS4 - PEFAV4 <= 0;
[PPAV5] AV*PAAV - AVS5 - PEFAV5 <= 0;
[PPAV6] AV*PAAV - AVS6 - PEFAV6 <= 0;
[PPAV7] AV*PAAV - AVS7 - PEFAV7 <= 0;
[PPAV8] AV*PAAV - AVS8 - PEFAV8 <= 0;
[PPAV9] AV*PAAV - AVS9 - PEFAV9 <= 0;
[PPAV10] AV*PAAV - AVS10 - PEFAV10 <= 0;
```

```
[PPAV11] AV*PAAV - AVS11 - PEFAV11 <= 0;
[PPAV12] AV*PAAV - AVS12 - PEFAV12 <= 0;

! AZEVEM;
[PPAZ1] AZ*PAAZ - AZS1 - PEFAZ1 <= 0;
[PPAZ2] AZ*PAAZ - AZS2 - PEFAZ2 <= 0;
[PPAZ3] AZ*PAAZ - AZS3 - PEFAZ3 <= 0;
[PPAZ4] AZ*PAAZ - AZS4 - PEFAZ4 <= 0;
[PPAZ5] AZ*PAAZ - AZS5 - PEFAZ5 <= 0;
[PPAZ6] AZ*PAAZ - AZS6 - PEFAZ6 <= 0;
[PPAZ7] AZ*PAAZ - AZS7 - PEFAZ7 <= 0;
[PPAZ8] AZ*PAAZ - AZS8 - PEFAZ8 <= 0;
[PPAZ9] AZ*PAAZ - AZS9 - PEFAZ9 <= 0;
[PPAZ10] AZ*PAAZ - AZS10 - PEFAZ10 <= 0;
[PPAZ11] AZ*PAAZ - AZS11 - PEFAZ11 <= 0;
[PPAZ12] AZ*PAAZ - AZS12 - PEFAZ12 <= 0;


! QUEDA DO CONSUMO DAS VACAS EM LACTACAO;

! POTREIRO;

[QCPOT1] POTVL1 - PEFPOT1 - QCVLPOT1 <= 0;
[QCPOT2] POTVL2 - PEFPOT2 - QCVLPOT2 <= 0;
[QCPOT3] POTVL3 - PEFPOT3 - QCVLPOT3 <= 0;
[QCPOT4] POTVL4 - PEFPOT4 - QCVLPOT4 <= 0;
[QCPOT5] POTVL5 - PEFPOT5 - QCVLPOT5 <= 0;
[QCPOT6] POTVL6 - PEFPOT6 - QCVLPOT6 <= 0;
[QCPOT7] POTVL7 - PEFPOT7 - QCVLPOT7 <= 0;
[QCPOT8] POTVL8 - PEFPOT8 - QCVLPOT8 <= 0;
[QCPOT9] POTVL9 - PEFPOT9 - QCVLPOT9 <= 0;
[QCPOT10] POTVL10 - PEFPOT10 - QCVLPOT10 <= 0;
[QCPOT11] POTVL11 - PEFPOT11 - QCVLPOT11 <= 0;
[QCPOT12] POTVL12 - PEFPOT12 - QCVLPOT12 <= 0;

! TIFTON;

[QCTFT1] TFTVL1 - PEFTFT1 - QCVLTFT1 <= 0;
[QCTFT2] TFTVL2 - PEFTFT2 - QCVLTFT2 <= 0;
[QCTFT3] TFTVL3 - PEFTFT3 - QCVLTFT3 <= 0;
[QCTFT4] TFTVL4 - PEFTFT4 - QCVLTFT4 <= 0;
[QCTFT5] TFTVL5 - PEFTFT5 - QCVLTFT5 <= 0;
[QCTFT6] TFTVL6 - PEFTFT6 - QCVLTFT6 <= 0;
[QCTFT7] TFTVL7 - PEFTFT7 - QCVLTFT7 <= 0;
[QCTFT8] TFTVL8 - PEFTFT8 - QCVLTFT8 <= 0;
[QCTFT9] TFTVL9 - PEFTFT9 - QCVLTFT9 <= 0;
[QCTFT10] TFTVL10 - PEFTFT10 - QCVLTFT10 <= 0;
[QCTFT11] TFTVL11 - PEFTFT11 - QCVLTFT11 <= 0;
[QCTFT12] TFTVL12 - PEFTFT12 - QCVLTFT12 <= 0;
```

```
! MILHETO;

[QCMIT1] MTVL1 - PEFMT1 - QCVLMT1 <= 0;
[QCMIT2] MTVL2 - PEFMT2 - QCVLMT2 <= 0;
[QCMIT3] MTVL3 - PEFMT3 - QCVLMT3 <= 0;
[QCMIT4] MTVL4 - PEFMT4 - QCVLMT4 <= 0;
[QCMIT5] MTVL5 - PEFMT5 - QCVLMT5 <= 0;
[QCMIT6] MTVL6 - PEFMT6 - QCVLMT6 <= 0;
[QCMIT7] MTVL7 - PEFMT7 - QCVLMT7 <= 0;
[QCMIT8] MTVL8 - PEFMT8 - QCVLMT8 <= 0;
[QCMIT9] MTVL9 - PEFMT9 - QCVLMT9 <= 0;
[QCMIT10] MTVL10 - PEFMT10 - QCVLMT10 <= 0;
[QCMIT11] MTVL11 - PEFMT11 - QCVLMT11 <= 0;
[QCMIT12] MTVL12 - PEFMT12 - QCVLMT12 <= 0;

! SORGO;

[QCSOR1] SORVL1 - PEFSOR1 - QCVLSOR1 <= 0;
[QCSOR2] SORVL2 - PEFSOR2 - QCVLSOR2 <= 0;
[QCSOR3] SORVL3 - PEFSOR3 - QCVLSOR3 <= 0;
[QCSOR4] SORVL4 - PEFSOR4 - QCVLSOR4 <= 0;
[QCSOR5] SORVL5 - PEFSOR5 - QCVLSOR5 <= 0;
[QCSOR6] SORVL6 - PEFSOR6 - QCVLSOR6 <= 0;
[QCSOR7] SORVL7 - PEFSOR7 - QCVLSOR7 <= 0;
[QCSOR8] SORVL8 - PEFSOR8 - QCVLSOR8 <= 0;
[QCSOR9] SORVL9 - PEFSOR9 - QCVLSOR9 <= 0;
[QCSOR10] SORVL10 - PEFSOR10 - QCVLSOR10 <= 0;
[QCSOR11] SORVL11 - PEFSOR11 - QCVLSOR11 <= 0;
[QCSOR12] SORVL12 - PEFSOR12 - QCVLSOR12 <= 0;

! AVEIA;

[QCAV1] AVVL1 - PEFAV1 - QCVLAV1 <= 0;
[QCAV2] AVVL2 - PEFAV2 - QCVLAV2 <= 0;
[QCAV3] AVVL3 - PEFAV3 - QCVLAV3 <= 0;
[QCAV4] AVVL4 - PEFAV4 - QCVLAV4 <= 0;
[QCAV5] AVVL5 - PEFAV5 - QCVLAV5 <= 0;
[QCAV6] AVVL6 - PEFAV6 - QCVLAV6 <= 0;
[QCAV7] AVVL7 - PEFAV7 - QCVLAV7 <= 0;
[QCAV8] AVVL8 - PEFAV8 - QCVLAV8 <= 0;
[QCAV9] AVVL9 - PEFAV9 - QCVLAV9 <= 0;
[QCAV10] AVVL10 - PEFAV10 - QCVLAV10 <= 0;
[QCAV11] AVVL11 - PEFAV11 - QCVLAV11 <= 0;
[QCAV12] AVVL12 - PEFAV12 - QCVLAV12 <= 0;

! AZEVEM;

[QCAZ1] AZVL1 - PEFAZ1 - QCVLAZ1 <= 0;
```

```
[QCAZ2] AZVL2 - PEFAZ2 - QCVLAZ2 <= 0;
[QCAZ3] AZVL3 - PEFAZ3 - QCVLAZ3 <= 0;
[QCAZ4] AZVL4 - PEFAZ4 - QCVLAZ4 <= 0;
[QCAZ5] AZVL5 - PEFAZ5 - QCVLAZ5 <= 0;
[QCAZ6] AZVL6 - PEFAZ6 - QCVLAZ6 <= 0;
[QCAZ7] AZVL7 - PEFAZ7 - QCVLAZ7 <= 0;
[QCAZ8] AZVL8 - PEFAZ8 - QCVLAZ8 <= 0;
[QCAZ9] AZVL9 - PEFAZ9 - QCVLAZ9 <= 0;
[QCAZ10] AZVL10 - PEFAZ10 - QCVLAZ10 <= 0;
[QCAZ11] AZVL11 - PEFAZ11 - QCVLAZ11 <= 0;
[QCAZ12] AZVL12 - PEFAZ12 - QCVLAZ12 <= 0;

! DIMINUICAO EFETIVA DO CONSUMO DAS VACAS EM LACTACAO;

! POTREIRO;

[DCPOT1] POTVL1 - PEPOT1 - QCVLPOT1 <= 0;
[DCPOT2] POTVL2 - PEPOT2 - QCVLPOT2 <= 0;
[DCPOT3] POTVL3 - PEPOT3 - QCVLPOT3 <= 0;
[DCPOT4] POTVL4 - PEPOT4 - QCVLPOT4 <= 0;
[DCPOT5] POTVL5 - PEPOT5 - QCVLPOT5 <= 0;
[DCPOT6] POTVL6 - PEPOT6 - QCVLPOT6 <= 0;
[DCPOT7] POTVL7 - PEPOT7 - QCVLPOT7 <= 0;
[DCPOT8] POTVL8 - PEPOT8 - QCVLPOT8 <= 0;
[DCPOT9] POTVL9 - PEPOT9 - QCVLPOT9 <= 0;
[DCPOT10] POTVL10 - PEPOT10 - QCVLPOT10 <= 0;
[DCPOT11] POTVL11 - PEPOT11 - QCVLPOT11 <= 0;
[DCPOT12] POTVL12 - PEPOT12 - QCVLPOT12 <= 0;

! TIFTON;

[DCTFT1] TFTVL1 - PETFT1 - QCVLTFT1 <= 0;
[DCTFT2] TFTVL2 - PETFT2 - QCVLTFT2 <= 0;
[DCTFT3] TFTVL3 - PETFT3 - QCVLTFT3 <= 0;
[DCTFT4] TFTVL4 - PETFT4 - QCVLTFT4 <= 0;
[DCTFT5] TFTVL5 - PETFT5 - QCVLTFT5 <= 0;
[DCTFT6] TFTVL6 - PETFT6 - QCVLTFT6 <= 0;
[DCTFT7] TFTVL7 - PETFT7 - QCVLTFT7 <= 0;
[DCTFT8] TFTVL8 - PETFT8 - QCVLTFT8 <= 0;
[DCTFT9] TFTVL9 - PETFT9 - QCVLTFT9 <= 0;
[DCTFT10] TFTVL10 - PETFT10 - QCVLTFT10 <= 0;
[DCTFT11] TFTVL11 - PETFT11 - QCVLTFT11 <= 0;
[DCTFT12] TFTVL12 - PETFT12 - QCVLTFT12 <= 0;

! MILHETO;

[DCMIT1] MTVL1 - PEMT1 - QCVLMT1 <= 0;
[DCMIT2] MTVL2 - PEMT2 - QCVLMT2 <= 0;
[DCMIT3] MTVL3 - PEMT3 - QCVLMT3 <= 0;
```

```
[DCMIT4] MTVL4 - PEMT4 - QCVLMT4 <= 0;
[DCMIT5] MTVL5 - PEMT5 - QCVLMT5 <= 0;
[DCMIT6] MTVL6 - PEMT6 - QCVLMT6 <= 0;
[DCMIT7] MTVL7 - PEMT7 - QCVLMT7 <= 0;
[DCMIT8] MTVL8 - PEMT8 - QCVLMT8 <= 0;
[DCMIT9] MTVL9 - PEMT9 - QCVLMT9 <= 0;
[DCMIT10] MTVL10 - PEMT10 - QCVLMT10 <= 0;
[DCMIT11] MTVL11 - PEMT11 - QCVLMT11 <= 0;
[DCMIT12] MTVL12 - PEMT12 - QCVLMT12 <= 0;

! SORGO;

[DCSOR1] SORVL1 - PESOR1 - QCVLSOR1 <= 0;
[DCSOR2] SORVL2 - PESOR2 - QCVLSOR2 <= 0;
[DCSOR3] SORVL3 - PESOR3 - QCVLSOR3 <= 0;
[DCSOR4] SORVL4 - PESOR4 - QCVLSOR4 <= 0;
[DCSOR5] SORVL5 - PESOR5 - QCVLSOR5 <= 0;
[DCSOR6] SORVL6 - PESOR6 - QCVLSOR6 <= 0;
[DCSOR7] SORVL7 - PESOR7 - QCVLSOR7 <= 0;
[DCSOR8] SORVL8 - PESOR8 - QCVLSOR8 <= 0;
[DCSOR9] SORVL9 - PESOR9 - QCVLSOR9 <= 0;
[DCSOR10] SORVL10 - PESOR10 - QCVLSOR10 <= 0;
[DCSOR11] SORVL11 - PESOR11 - QCVLSOR11 <= 0;
[DCSOR12] SORVL12 - PESOR12 - QCVLSOR12 <= 0;

! AVEIA;

[DCAV1] AVVL1 - PEAV1 - QCVLAV1 <= 0;
[DCAV2] AVVL2 - PEAV2 - QCVLAV2 <= 0;
[DCAV3] AVVL3 - PEAV3 - QCVLAV3 <= 0;
[DCAV4] AVVL4 - PEAV4 - QCVLAV4 <= 0;
[DCAV5] AVVL5 - PEAV5 - QCVLAV5 <= 0;
[DCAV6] AVVL6 - PEAV6 - QCVLAV6 <= 0;
[DCAV7] AVVL7 - PEAV7 - QCVLAV7 <= 0;
[DCAV8] AVVL8 - PEAV8 - QCVLAV8 <= 0;
[DCAV9] AVVL9 - PEAV9 - QCVLAV9 <= 0;
[DCAV10] AVVL10 - PEAV10 - QCVLAV10 <= 0;
[DCAV11] AVVL11 - PEAV11 - QCVLAV11 <= 0;
[DCAV12] AVVL12 - PEAV12 - QCVLAV12 <= 0;

! AZEVEM;

[DCAZ1] AZVL1 - PEAZ1 - QCVLAZ1 <= 0;
[DCAZ2] AZVL2 - PEAZ2 - QCVLAZ2 <= 0;
[DCAZ3] AZVL3 - PEAZ3 - QCVLAZ3 <= 0;
[DCAZ4] AZVL4 - PEAZ4 - QCVLAZ4 <= 0;
[DCAZ5] AZVL5 - PEAZ5 - QCVLAZ5 <= 0;
[DCAZ6] AZVL6 - PEAZ6 - QCVLAZ6 <= 0;
[DCAZ7] AZVL7 - PEAZ7 - QCVLAZ7 <= 0;
```

```
[DCAZ8] AZVL8 - PEAZ8 - QCVLAZ8 <= 0;
[DCAZ9] AZVL9 - PEAZ9 - QCVLAZ9 <= 0;
[DCAZ10] AZVL10 - PEAZ10 - QCVLAZ10 <= 0;
[DCAZ11] AZVL11 - PEAZ11 - QCVLAZ11 <= 0;
[DCAZ12] AZVL12 - PEAZ12 - QCVLAZ12 <= 0;


!PERDA EM LEITE;

! POTREIRO;

[PPLPOT1] (680*PEPOT1)/1.15 <= PLPOT1;
[PPLPOT2] (340*PEPOT2)/1.15 <= PLPOT2;
[PPLPOT3] (238*PEPOT3)/1.15 <= PLPOT3;
[PPLPOT4] (170*PEPOT4)/1.15 <= PLPOT4;
[PPLPOT5] (102*PEPOT5)/1.15 <= PLPOT5;
[PPLPOT6] (68*PEPOT6)/1.15 <= PLPOT6;
[PPLPOT7] (34*PEPOT7)/1.15 <= PLPOT7;
[PPLPOT8] (68*PEPOT8)/1.15 <= PLPOT8;
[PPLPOT9] (340*PEPOT9)/1.15 <= PLPOT9;
[PPLPOT10] (340*PEPOT10)/1.15 <= PLPOT10;
[PPLPOT11] (510*PEPOT11)/1.15 <= PLPOT11;
[PPLPOT12] (510*PEPOT12)/1.15 <= PLPOT12;
[PPLPOTVR] PLPOT1+PLPOT2+PLPOT3+PLPOT4+PLPOT10+PLPOT11+PLPOT12 <=
PLPOTV;
[PLPOTIR] PLPOT5+PLPOT6+PLPOT7+PLPOT8+PLPOT9 <= PLPOTI;

! TIFTON;

[PPLTFT1] (2250*PETFT1)/1.15 <= PLTFT1;
[PPLTFT2] (1350*PETFT2)/1.15 <= PLTFT2;
[PPLTFT3] (900*PETFT3)/1.15 <= PLTFT3;
[PPLTFT4] (900*PETFT4)/1.15 <= PLTFT4;
[PPLTFT5] (0*PETFT5)/1.15 <= PLTFT5;
[PPLTFT6] (0*PETFT6)/1.15 <= PLTFT6;
[PPLTFT7] (0*PETFT7)/1.15 <= PLTFT7;
[PPLTFT8] (0*PETFT8)/1.15 <= PLTFT8;
[PPLTFT9] (450*PETFT9)/1.15 <= PLTFT9;
[PPLTFT10] (900*PETFT10)/1.15 <= PLTFT10;
[PPLTFT11] (900*PETFT11)/1.15 <= PLTFT11;
[PPLTFT12] (1350*PETFT12)/1.15 <= PLTFT12;
[PLTFTR] PLTFT1+PLTFT2+PLTFT3+PLTFT4+PLTFT9+PLTFT10+PLTFT11+PLTFT12
<= PLTFT;

! MILHETO;

[PPLMT1] (1800*PEMT1)/1.15 <= PLMT1;
[PPLMT2] (1440*PEMT2)/1.15 <= PLMT2;
[PPLMT3] (720*PEMT3)/1.15 <= PLMT3;
```

[PPLMT4] (720*PEMT4)/1.15 <= PLMT4;
[PPLMT5] (360*PEMT5)/1.15 <= PLMT5;
[PPLMT6] (0*PEMT6)/1.15 <= PLMT6;
[PPLMT7] (0*PEMT7)/1.15 <= PLMT7;
[PPLMT8] (0*PEMT8)/1.15 <= PLMT8;
[PPLMT9] (0*PEMT9)/1.15 <= PLMT9;
[PPLMT10] (360*PEMT10)/1.15 <= PLMT10;
[PPLMT11] (720*PEMT11)/1.15 <= PLMT11;
[PPLMT12] (1080*PEMT12)/1.15 <= PLMT12;
[PLMTR] PLMT1+PLMT2+PLMT3+PLMT4+PLMT5+PLMT10+PLMT11+PLMT12 <=
PLMT;

! SORGO;

[PPLSOR1] (1800*PESOR1)/1.15 <= PLSOR1;
[PPLSOR2] (1440*PESOR2)/1.15 <= PLSOR2;
[PPLSOR3] (720*PESOR3)/1.15 <= PLSOR3;
[PPLSOR4] (360*PESOR4)/1.15 <= PLSOR4;
[PPLSOR5] (0*PESOR5)/1.15 <= PLSOR5;
[PPLSOR6] (0*PESOR6)/1.15 <= PLSOR6;
[PPLSOR7] (0*PESOR7)/1.15 <= PLSOR7;
[PPLSOR8] (0*PESOR8)/1.15 <= PLSOR8;
[PPLSOR9] (360*PESOR9)/1.15 <= PLSOR9;
[PPLSOR10] (720*PESOR10)/1.15 <= PLSOR10;
[PPLSOR11] (720*PESOR11)/1.15 <= PLSOR11;
[PPLSOR12] (1080*PESOR12)/1.15 <= PLSOR12;
[PLSORR]PLSOR1+PLSOR2+PLSOR3+PLSOR4+PLSOR9+PLSOR10+PLSOR11+PLSOR
12 <= PLSOR;

!AVEIA;

[PPLAV1] (0*PEAV1)/1.15 <= PLAV1;
[PPLAV2] (0*PEAV2)/1.15 <= PLAV2;
[PPLAV3] (0*PEAV3)/1.15 <= PLAV3;
[PPLAV4] (0*PEAV4)/1.15 <= PLAV4;
[PPLAV5] (0*PEAV5)/1.15 <= PLAV5;
[PPLAV6] (1200*PEAV6)/1.15 <= PLAV6;
[PPLAV7] (1800*PEAV7)/1.15 <= PLAV7;
[PPLAV8] (1800*PEAV8)/1.15 <= PLAV8;
[PPLAV9] (1200*PEAV9)/1.15 <= PLAV9;
[PPLAV10] (0*PEAV10)/1.15 <= PLAV10;
[PPLAV11] (0*PEAV11)/1.15 <= PLAV11;
[PPLAV12] (0*PEAV12)/1.15 <= PLAV12;
[PLAVR] PLAV6+PLAV7+PLAV8+PLAV9 <= PLAV;

! AZEVEM;

[PPLAZ1] (0*PEAZ1)/1.15 <= PLAZ1;
[PPLAZ2] (0*PEAZ2)/1.15 <= PLAZ2;

```
[PPLAZ3] (0*PEAZ3)/1.15 <= PLAZ3;
[PPLAZ4] (0*PEAZ4)/1.15 <= PLAZ4;
[PPLAZ5] (0*PEAZ5)/1.15 <= PLAZ5;
[PPLAZ6] (0*PEAZ6)/1.15 <= PLAZ6;
[PPLAZ7] (1200*PEAZ7)/1.15 <= PLAZ7;
[PPLAZ8] (1800*PEAZ8)/1.15 <= PLAZ8;
[PPLAZ9] (2100*PEAZ9)/1.15 <= PLAZ9;
[PPLAZ10] (900*PEAZ10)/1.15 <= PLAZ10;
[PPLAZ11] (0*PEAZ11)/1.15 <= PLAZ11;
[PPLAZ12] (0*PEAZ12)/1.15 <= PLAZ12;
[PLAZR] PLAZ7+PLAZ8+PLAZ9+PLAZ10 <= PLAZ;

!LIGACAO RACAO MENSAL E ANUAL;

!RACAO VACAS EM LACTACAO;
[LRVL] RVL1 + RVL2 + RVL3 + RVL4 + RVL5 + RVL6 + RVL7 + RVL8 + RVL9 +
RVL10 + RVL11 + RVL12 - RVL = 0;

!RACAO REBANHO;
[LRREB] RREB1 + RREB2 + RREB3 + RREB4 + RREB5 + RREB6 + RREB7 + RREB8 +
RREB9 + RREB10 + RREB11 + RREB12 - RREB = 0;

!RACAO TOTAL;
[RTOT] RVL + RREB = R;

!LIGACAO SILAGEM MENSAL E ANUAL;

[SVLVER] MSILVL1 + MSILVL2 + MSILVL3 + MSILVL4 + MSILVL10 + MSILVL11 +
MSILVL12 = MSILVLVER;

[SVLINV] MSILVL5 + MSILVL6 + MSILVL7 + MSILVL8 + MSILVL9 = MSILVLINV;

[SVL] MSILVLVER + MSILVLINV = MSILVL;

[SREB] MSILREB1 + MSILREB2 + MSILREB3 + MSILREB4 + MSILREB5 + MSILREB6
+ MSILREB7 + MSILREB8 + MSILREB9 + MSILREB10 + MSILREB11 + MSILREB12 =
MSILREB;

[MSILT] MSILVL + MSILREB = MSIL;

! LIGACAO MILHO MENSAL E ANUAL;

[LMGVL] MGVL1 + MGVL2 + MGVL3 + MGVL4 + MGVL5 + MGVL6 + MGVL7 +
MGVL8 + MGVL9 + MGVL10 + MGVL11 + MGVL12 - MGVLT = 0;

[LMGREB] MGREB1 + MGREB2 + MGREB3 + MGREB4 + MGREB5 + MGREB6 +
MGREB7 + MGREB8 + MGREB9 + MGREB10 + MGREB11 + MGREB12 - MGREBT =
0;
```

```
[LMGTOT] MGVLT + MGREBT - MG = 0;

!LIGACAO LEITE MENSAL E ANUAL;
[LEIT] LEITE = L1 + L2 + L3 + L4 + L5 + L6 + L7 + L8 + L9 + L10 + L11 + L12;

! LIGACAO ENTRE AS CATEGORIAS DO REBANHO;
[VLVS] (1-RVLVT)*VL - RVLVT*VS <= 0;
[VLT] 0.5*VL - T <= 0;
[VLN] 0.5*(1-MORT)*VL - N <= 0;
[VLVD] VD - 0.4*VL <= 0;

! LIGACAO ENTRE O MILHO SILAGEM E A ENSILADEIRA;
[MILENS] MSIL - 50*ENSILAD <= 0; @BIN(ENSILAD);


!PESO ANIMAIS;
[PTER] PTERN = ((PV-PNASC)/(2*365))*(365/2);
[PNOVI] PNOV = ((PV-PNASC)/(2*365))*(365*1.5);

!INGESTAO/PV;
[CINGMS] CING = CID*30;

!NECESSIDADE DE ENERGIA E PROTEINA DOS ANIMAIS;

! ENERGIA;
[NECEVL] NECVL = (0.02134*PV+3.502)*30;
[NECET] NECT = (0.041366*PTERN+3.108333)*30;
[NECEN] NECN = (0.041366*PNOV+3.108333)*30;
[NECEVS] NECVS = NECVL*1.2;

! PROTEINA;
[NECPRVL] NECPVL = (0.000442*PV + 0.142)*30;
[NECPRT]  NECPT = ((120/1000)/45*PTERN)*30;
[NECPRN] NECPN = (0.0002163013699*PNOV + 0.1896803653)*30;
[NECPRVS] NECPVS = NECPVL*1.2;

! POTENCIAL DE RENDIMENTO LEITEIRO;

![RPRL] LEITE - VL*PRL*365 <= 0;

END
```

Anexo 6

TITLE MODELO DE WALD COM LEITE - PEQUENO AGRICULTOR DO NOROESTE DO RS;

```
MAX = MIN;

MSIL <= 0;

! RESTRIÇÕES;

! CUSTO DE OPORTUNIDADE DO TRABALHO FAMILIAR;
![COPWF] MIN >= WF*400*13;@FREE(MIN);
```

Obs.: As demais restrições que compõem este modelo são iguais as do modelo Foco-Perda (anterior), ou seja, somente as restrições formuladas acima diferem do modelo que está no anexo 5.

Anexo 7

```
TITLE MODELO DE WALD SEM LEITE - PEQUENO AGRICULTOR DO NOROESTE
DO RS;

MAX = MIN;

LEITE <= 0;

! RESTRIÇÕES;

! CUSTO DE OPORTUNIDADE DO TRABALHO FAMILIAR;
![COPWF] MIN >= WF*400*13;@FREE(MIN);
```

Obs.: As demais restrições que compõem este modelo são iguais as do modelo Foco-Perda, ou seja, somente as restrições formuladas acima diferem do modelo que está no anexo 5.