Universidade Federal da Fonteira Sul – campus Cerro Largo

Curso de Agronomia

FUNDAMENTOS ECONÔMICOS PARA A ANÁLISE DE SISTEMAS DE PRODUÇÃO

Benedito Silva Neto

2019

FUNDAMENTOS ECONÔMICOS PARA A ANÁLISE DE SISTEMAS DE PRODUÇÃO

Índice

PRIMEIRA PARTE: AS CATEGORIAS DA RIQUEZA, DO VALOR E DO PREÇO

Introdução

Uma categoria corresponde a um reflexo no pensamento de uma determinada da realidade. Na economia, portanto, o que é elaborado abstratamente na consciência dos seres humanos, os chamados "conceitos", sempre refletem determinada realidade. Neste sentido eles não são apenas "ferramentas" de análise que podem ser elaborados livremente, apenas em função da necessidade de compreensão da realidade. Ao contrário, estas próprias "ferramentas" não podem ser dissociadas de certa compreensão da realidade. É por esta razão que, para o emprego de determinado conceito, é imprescindível a realização de uma rigorosa análise categorial de forma a proporcionar uma clara compreensão da sua natureza. Isto é ainda mais importante quando se trata das categorias fundamentais a partir das quais se definem as demais categorias empregadas na economia, como renda, lucro, custo e juro. Tal análise, mesmo que sucinta e, até certo ponto, superficial, é o objetivo desta primeira parte.[1]

Categorias fundamentais da economia: riqueza, valor e preço

Riqueza: tudo o que é considerado útil pelos seres humanos tornando-se necessário para a reprodução da sociedade. Possui caráter qualitativo e é incomensurável relativamente (uma riqueza não possui medida em comum com outra riqueza).

Valor: tempo de trabalho socialmente necessário para a geração de uma riqueza a partir da transformação de uma riqueza fornecida pela natureza.

Preço: maior tempo de trabalho socialmente necessário para a geração de uma riqueza. Valor marginal em tempo de trabalho em relação à quantidade produzida. Poder de compra de riquezas. Informação aos agentes microeconômicos sobre a demanda e sobre como alocar os recursos produtivos.

---

1 Esta parte foi escrita baseada nas seguintes referências:
SILVA NETO, B.; **Agroecologia e análise econômica de sistemas de produção:** uma abordagem baseada no materialismo histórico e dialético. Cerro Largo, Ed. UFFS, 2016
SILVA NETO, B. A importância das rendas diferenciais na teoria dos preços de Marx. **Desenvolvimento em Questão**, ano 16, número 44, p. 9-41, jul/set 2018.

Relações formais entre riquezas, valores e preços

Problema primal: definir a quantidade de cada produto de consumo final e de meio de produção que minimiza o valor (em unidades físicas), de forma a satisfazer a demanda, respeitando a disponibilidade de recursos.

$$\text{Minimizar} \quad \sum c_i^l q_i^l \; + \; \sum c_z^x k_z^x$$

sujeita às restrições

$$\sum q_i^l > D_i$$

$$\sum k_z^x - \sum a_{iz}^l q_i^l > K_z$$

$$\sum \sigma_{jz}^x k_z^x < R_j$$

onde temos,

c_i^l = quantidade *c* de trabalho necessária por unidade do produto *i* com a técnica *l*.

q_i^l = quantidade *q* do produto *i* produzido com a técnica *l*.

c_z^x = quantidade *c* de trbalho necessário por unidade de meio de produção *z* produto com a técnica *x*.

k_z^x = quantidade K do meio de produção (gerado pelo trabalho) *z* com a técnica *x*.

a_{iz}^l = quantidade *a* do meio de produção *z* necessária para a produção de uma unidade do produto *i* com a técnica *l*.

D_i = quantidade demandada *D* de produto *i*.

K_z = excedente *K* do meio de produção *z* necessário para o crescimento econômico

σ_{jz}^x = quantidade σ de recurso natural *j* necessário para a produção do meio de produção z com a técnica x.

R_j = quantidade máxima *R* a ser utilizada do recurso natural *j*.

Problema dual: encontrar os preços dos produtos e dos recursos que maximizam o valor monetário considerando a demanda de produtos de consumo final, a disponibilidade de recursos e as condições técnicas de produção.

Função objetivo: maximizar $\sum p_i D_i + \sum \beta_z K_z - \sum r_j R_j$

sujeita à restrição

$$p_i - \sum a_{iz}^l \beta_z < c_i^l$$

$$\beta_z - \sum \sigma_{jz}^x r_j \leq c_z^x$$

onde, além das variáveis do problema primal, já descritas, temos,

p_i = preço do produto *i.*

β_z = preço do meio de produção (gerado pelo trabalho) z.

r_j = preço do recurso natural *j.*

De acordo com o teorema da dualidade, com as soluções ótimas temos,

$$\text{mínimo} \quad \sum c_i^l q_i^l + \sum c_z^x k_z^x = \text{máximo} \quad \sum p_i D_i + \sum \beta_z K_z - \sum r_j R_j$$

ou seja, o mínimo de trabalho socialmente necessário (valor em trabalho) para satisfazer as demandas dos produtos a partir de certa disponibilidade de recursos corresponde ao máximo valor monetário, respeitadas as condições técnicas de produção.

Interpretação do modelo

Riquezas: demanda de produtos de consumo final, meios de produção excedentes e recursos naturais.

As riquezas são variáveis exógenas, que desencadeiam os processos econômicos.

A definição da produção e da repartição da riqueza é um processo macroeconômico, definido pela luta de classes.

Valor em tempo de trabalho: valor da função objetivo do problema primal

Valor monetário (definido pelos preços): valor da função objetivo do problema dual

Soluções dos modelos são condicionadas por restrições técnicas e econômicas, mas a quantidade e a distribuição das riquezas são definidas pela luta de classes.

Preços e técnicas eficientes

Preços eficientes são os que induzem os agentes microeconômicos a escolher técnicas eficientes, ou seja, aquelas que minimizam o tempo de trabalho socialmente necessário considerando as restrições técnicas.

Influência da oferta e da demanda sobre os preços

A curva de oferta pode ser apresentada como uma função crescente em que,

$$p = f(q) \qquad (01)$$

Considerando esta função como contínua e derivável, pode-se calcular o custo de produção total (c_t) de certa quantidade (q_p,), como,

$$c_t = \int_0^{q_p} p \; dq \qquad (02)$$

sendo, portanto, o preço (p) obtido por,

$$p = \frac{dc_t}{dq} \qquad (03)$$

o que demonstra que o preço é o custo marginal de produção.

No caso em que todos os produtores recebem um mesmo preço como, por exemplo, quando participam de um mercado em concorrência perfeita[2], denominando o preço de p_p, o valor monetário total da produção (m_t) é definido por,

$$m_t = p_p \, q_p \qquad (04)$$

Neste caso, os produtores que possuem custos mais baixos geram uma renda diferencial (r_d), cujo total é definido por,

$$r_d = \int_0^{q_p} (p_p - p) \, dq \qquad (05)$$

o que implica que o valor monetário total da produção (m_t) é,

$$m_t = c_t + r_d$$

e o custo de produção total,

$$c_t = m_t - r_d \qquad (06)$$

Exemplo numérico

Um exemplo numérico elaborado a partir do modelo pode contribuir para ilustrar as relações entre trabalho socialmente necessário, valor monetário e rendas diferenciais. Nesse exemplo, um produto de consumo final pode ser gerado a partir de cinco técnicas, cada qual exigindo um meio de

2 Como o faz Marx (1999) ao formular o problema da transformação de valores em preços.

produção que só pode ser produzido até um máximo de uma unidade por cada técnica. As técnicas aplicadas diretamente para a fabricação do produto de consumo final exigem quantidades crescentes de trabalho, sendo que uma unidade de trabalho é exigida por unidade de meio de produção. Assim, o problema primal, fornece as quantidades de produto de consumo final e de meio de produção a serem produzidas por cada condição de produção de forma que o trabalho a ser empregado seja o mínimo possível. O modelo primal é descrito como,

Minimizar $q_1 + 2\, q_2 + 3\, q_3 + 4\, q_4 + 5\, q_5 + k$ (7)

sujeito às restrições

dpc)	$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5$	$>= D$	(8)
dmp)	$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 - k$	$<= 0$	(9)
c1)	q_1	$<= 1$	(10)
c2)	q_2	$<= 1$	(11)
c3)	q_3	$<= 1$	(12)
c4)	q_4	$<= 1$	(13)
c5)	q_5	$<= 1$	(14)

onde as variáveis são,

q_i = quantidade q do produto de consumo fabricado com na condição de produção i, sendo i = 1 a 5;

k = quantidade k de meio de produção necessário para fabricar o produto de consumo;

D = variável exógena que exprime a demanda total do produto de consumo.

e quanto às restrições,

dpc = quantidade a ser produzida (demanda) do produto de consumo;

dpm = quantidade a ser produzida (demanda) do meio de produção;

c_i = condição de produção que limita a quantidade de produto de consumo fabricado na condição de produção i, sendo i = 1 a 5.

A partir do problema primal obtém-se o problema dual que fornece os preços que maximizam o valor monetário. O problema dual é descrito como,

Maximizar D $pq - 0\, pk - rc_1 - rc_2 - rc_3 - rc_4 - rc_5$ (15)

sujeito às restrições

$pqkrc_1)$ $\quad pq - pk - rc_1 \quad <= 1$ (16)

$pqkrc_2)$ $\quad pq - pk - rc_2 \quad <= 2$ (17)

$pqkrc_3)$ $\quad pq - pk - rc_3 \quad <= 3$ (18)

$pqkrc_4)$ $\quad pq - pk - rc_4 \quad <= 4$ (19)

$pqkrc_5)$ $\quad pq - pk - rc_5 \quad <= 5$ 230)

$lpk)$ $\quad pk \quad <= 1$ (21)

onde as variáveis são,

pq = preço do produto de consumo;

pk = preço do meio de produção necessário para a fabricação do produto de consumo;

rc_i = renda diferencial proporcionada pela limitação da quantidade gerada do produto de consumo na condição de produção *i*, sendo *i* = 1 a 5.

e quanto às restrições,

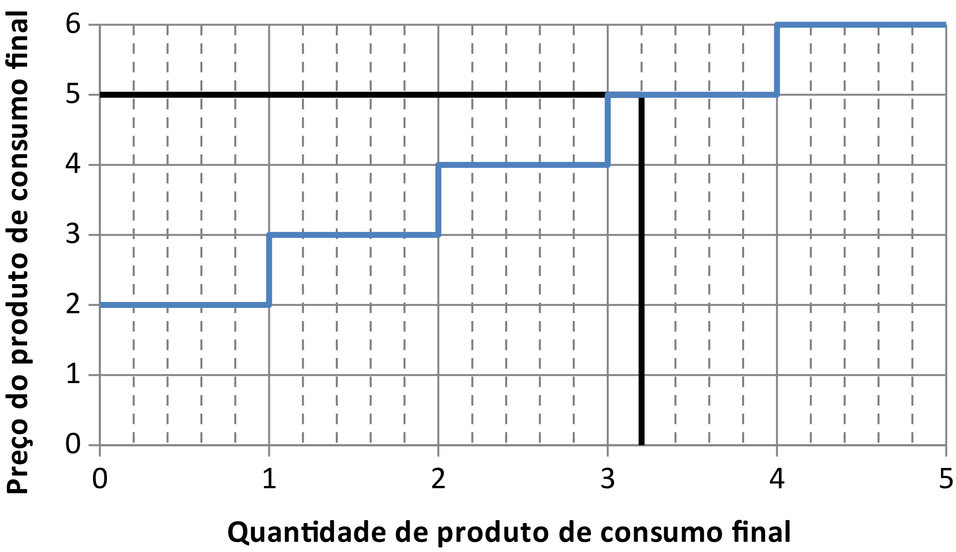
$pqkrc_i$ = ligação entre o preço do produto de consumo, o preço do meio de produção e a condição de produção *i*, sendo *i* = 1 a 5;

lpk = limitação do preço do meio de produção ao trabalho necessário para a sua produção.

Devido à simplicidade do exemplo os preços obtidos correspondem a números discretos, equivalentes à quantidade de trabalho exigido por cada técnica acrescida do preço do meio de produção, que é de uma unidade. As soluções fornecidas pelo exemplo são, portanto, triviais. No problema primal o número de técnicas necessárias corresponde ao montante da demanda, sendo que cada técnica pode gerar no máximo uma unidade de produto. No problema dual, como já mencionado, o preço do produto de consumo final corresponde ao montante da demanda em números inteiros, acrescido do preço do meio de produção. Por esta razão a curva de oferta obtida a partir do modelo possui a forma de uma "escada", o que indica que, se a quantidade a ser ofertada for um número fracionário, o preço será o número inteiro subsequente ao da quantidade demandada acrescido do preço do meio de produção. Isto ocorre devido ao número limitado de técnicas e meios de produção disponíveis, assim como pelos valores dos coeficientes das variáveis endógenas do modelo. A forma da curva de oferta obtida, apesar da extrema simplicidade do exemplo, indica que as curvas de oferta, em condições reais de produção, devem ser extremamente irregulares. Isto porque as condições de produção reais são muito diferentes entre si quanto à exigência de recursos naturais, à capacidade de produção e à produtividade do trabalho que elas permitem alcançar, além de apresentar um caráter discreto. A simplicidade do exemplo apresentado, por outro lado, facilita o cálculo dos valores a ele relacionados (na medida em que as áreas são formadas por retângulos). Enfim, é interessante observar o quanto são irrealistas as curvas de oferta, em geral contínuas e lineares, apresentadas nos manuais baseados na economia neoclássica, o que pode induzir a uma compreensão distorcida do comportamento das relações entre os preços e a produção.

Para ilustrar como podem ser obtidos os valores relativos à curva dos preços do produto de consumo em função da quantidade, foi considerada a solução obtida por meio do modelo a partir de uma demanda de 3,2 unidades físicas de produto de consumo final. O preço deste produto, que resulta da solução do problema dual, é de 5 unidades monetárias. A demanda de 3,2 unidades é satisfeita com a produção na condição necessária mais exigente em trabalho produzindo 0,2 unidades e as demais uma unidade (capacidade máxima em cada condição).

A partir dos resultados foi elaborada a figura 1, que mostra a curva de oferta com o valor monetário total, o custo total e a renda diferencial. Nesta figura o valor monetário total da produção corresponde ao retângulo delimitado pelas linhas em negrito, sendo a figura abaixo da curva de oferta, delimitada à direita pela linha vertical em negrito, correspondente ao custo total e a figura acima da curva de oferta, delimitada acima pela linha horizontal em negrito, correspondente à renda diferencial.



Fonte: resultados da pesquisa

Figura 1. Curva de oferta do preço do produto de consumo final em função da quantidade, mostrando o custo total da produção, o valor monetário total e a renda diferencial, obtidos a partir de uma demanda de 3,2 unidades.

Os cálculos dos valores do custo total, da renda diferencial e do valor monetário total, realizados a partir da solução do modelo, são descritos na tabela 1.

Tabela 1. Valores obtidos a partir da solução do modelo considerando uma demanda de produtos de consumo final de 3,2 unidades físicas.

Produto e técnica	q1	q2	q3	q4	q5	k	Total
Produção	1	1	1	0,2	0	3,2	
Trabalho aplicado	1	2	3	0,8	0	3,2	10
Valor da produção	5	5	5	1	0	3,2	19,2
Meio de produção	1	1	1	0,2	0		
Valor meio de prod.	1	1	1	0,2	0		
Renda diferencial	3	2	1	0	0		6
Valor agregado	1	2	3	0,8	0	3,2	10

Fonte: elaborado pelo autor.

O trabalho total aplicado para a fabricação dos meios de produção e dos produtos de consumo final observado na figura 1 corresponde à área da figura 1 abaixo da curva de oferta delimitada pela linha vertical traçada a partir da quantidade de 3,2 unidades. Esta área corresponde à soma da área dos retângulos abaixo da curva (2 + 3 + 4 + (5*0,2 = 1) = 10), o que é igual ao total mostrado na segunda linha da tabela 1. O mesmo valor do trabalho total é obtido pelo cálculo do valor monetário cujo resultado é mostrado na última linha da tabela 1, o qual correspondente ao valor da produção subtraído das rendas diferenciais. O valor da produção é obtido pela multiplicação das 3,2 unidades físicas de produto multiplicado pelo preço de 5 unidades monetárias, do que resulta 16 unidades. O mesmo resultado é obtido pela soma do valor da produção obtido com cada técnica (sem contar o valor do meio de produção, pois este já está contido no preço dos produtos de consumo), conforme mostrado na terceira linha da tabela 1. O total da renda diferencial correspondente na figura 1 à área acima da curva é a soma da renda diferencial gerada em cada condição de produção mostrada na quarta linha da tabela 1, que resulta em 6 unidades.

É interessante observar que a subtração das rendas diferenciais do valor da produção é em geral interpretada como uma forma de exploração dos trabalhadores na medida em que a extração de uma renda significa a apropriação de parte do produto por um agente externo que não participou do processo produtivo. No entanto, são as rendas diferenciais que permitem que os produtores que realizam um trabalho socialmente necessário possam ser remunerados de acordo com o seu trabalho. Neste sentido, é possível interpretar a subtração das rendas diferenciais como expressão do caráter social da produção. Este fenômeno é ilustrado na tabela 2, elaborada a partir da solução do exemplo numérico apresentado. Salientamos que na tabela 2 a produção é obtida pelas 8 unidades de trabalho divididas pelo trabalho exigido para produzir uma unidade de produto em cada condição de produção, o valor da produção é obtido pela multiplicação da produção pelo preço do produto e o valor monetário é calculado pelo valor da produção menos o valor do meio de produção menos a renda diferencial.

Como pode ser observado na tabela 2, o emprego de 8 unidades de trabalho nas condições de produção que compõe a base ótima (1 a 4, isto é, nas quais a solução ótima do modelo indica uma produção não nula, como mostrado na primeira linha da tabela 1), proporcionam um valor monetário de 8 unidades. Tal valor monetário é, portanto, numericamente equivalente ao trabalho aplicado. Como o trabalho aplicado nas condições que compõem a base ótima é necessário e suficiente para a satisfação da demanda, ele pode ser interpretado como o "trabalho socialmente necessário" descrito na literatura marxista. Já o trabalho empregado na condição de produção 5 (q5) proporciona um valor monetário de apenas 6,4 unidades, portanto menor do que as 8 unidades de trabalho aplicadas, como pode ser observado na tabela 2. Assim, a "eficiência" dos preços fornecidos pela solução do modelo significa também que estes permitem aos produtores identificar as condições de produção menos vantajosas economicamente.

Tabela 2. Valores gerados pelo emprego de 8 unidades de trabalho, considerando os dados da solução do exemplo numérico.

Produto e técnica	q1	q2	q3	q4	q5
Produção	8	4	2,67	2	1,6
Valor da produção	40	20	13,33	10	8
Valor do meio de produção	8	4	2,67	2	1,6
Renda diferencial	24	8	2,67	0	0
Valor agregado	8	8	8	8	6,4
Lucro	1,6	1,6	1,6	1,6	1,28
Salário	6,4	6,4	6,4	6,4	5,12
Taxa de lucro	11,11%	15,38%	17,65%	19,05%	19,05%
Lucro + renda diferencial	25,6	9,6	4,27	1,6	1,28
Taxa de lucro + renda dif.	177,78%	92,31%	47,06%	19,05%	19,05%

Fonte: elaborado pelo autor.

Nas duas últimas linhas da tabela 2 são mostradas as taxas de lucro, sem e com a adição das rendas diferenciais. Como pode ser observado nesta tabela, as taxas de lucro não possuem uma clara correlação com as condições de produção (técnicas) eficientes. Isto implica que, se as taxas de lucro sem as rendas diferenciais (penúltima linha da tabela 2) forem adotadas como critério para a escolha das técnicas que proporcionam as maiores taxas de lucro isto levaria os produtores a abandonar as técnicas eficientes 1 a 3 para adotar, não apenas as técnicas eficientes 4, mas também a técnica ineficiente 5. No caso em que as rendas diferenciais fossem incluídas no lucro, os produtores tenderiam a privilegiar fortemente um número limitado de técnicas que, embora eficientes, permitem a geração de uma quantidade limitada de produtos. No caso em que o limite ao emprego de tais técnicas fossem recursos naturais haveria, portanto, uma forte pressão dos produtores para aumentar a exploração de tais recursos, o que poderia colocar problemas para a sustentabilidade ecológica do sistema econômico.

A taxa de lucro, portanto, com ou sem a consideração das rendas diferenciais no seu cálculo, é um critério ineficiente de alocação de recursos. Tal ineficiência faz com que a sua adoção como critério de decisão pelos produtores provoque a formação de preços ineficientes, perturbando o processo de reprodução econômica da sociedade.

Riquezas, valores e preços na reprodução econômica da sociedade

Na tabela 1 é apresentado um esquema de reprodução econômica baseado nas riquezas, considerando a economia como um sistema aberto. Observa-se que o recurso natural não depende de outros recursos para ser produzido, pois é fornecido pela natureza. Apenas a geração do meio de produção 1 depende do recurso natural. A produção dos três meios de produção é interdependente. No que diz respeito aos produtos para consumo final (abreviados na tabela como “produtos finais”), estes não entram na produção de qualquer outro produto. Ressaltamos que o sistema encontra-se em reprodução simples, como indica a ausência de excedentes, os quais, no entanto, poderiam ser introduzidos no problema sem afetar as suas características.

As relações mostradas na tabela 1 são em boa parte qualitativas. Como pode ser observado nesta tabela, a soma dos meios de produção apresentados nas linhas da tabela não corresponde a quantidade dos produtos por eles gerados, sendo que estas, por serem de qualidades diferentes, não podem ser somadas. O tempo de trabalho requerido também é específico a cada produto. A especificidade das relações quantitativas entre meios de produção e produtos finais e entre estes e o tempo de trabalho deve-se ao fato de que estas relações são determinadas por técnicas de produção específicas a cada produto.

Tabela 3: Esquema de reprodução em riquezas (em unidades físicas) de um sistema econômico com escassez de recurso natural.

	Recurso Natural	Meio de produção 1	Meio de produção 2	Meio de produção 3	Produto	Trabalho
Recurso natural					460	
Meio de produção 1	460		184	230	460	920
Meio de produção 2		310			387,5	2325
Meio de produção 3			148,5		855	9000
Produto final 1		100	50	500	100	1000
Produto final 2		50	5	125	50	1000
Total	460	460	387,5	855		14245
Excedente	0	0	0	0		

Fonte: elaborado pelo autor.

A consideração do recurso natural como uma entrada de riquezas no sistema econômico, assim como a consideração de que os produtos destinados aos consumidores correspondem a riquezas que saem do sistema, e não apenas a um elo no ciclo de produção, diferenciam o esquema apresentado na tabela 1 em relação aos esquemas marxistas usualmente utilizados. Por outro lado, é importante salientar que os esquemas de reprodução de Marx, ao considerarem dois departamentos dedicados a produções qualitativamente diferentes (produtos de consumo e meios de produção), de certa forma, já incluem a questão da reprodução em termos de valores de uso, ou seja, de riquezas (Rosdolsky, 1977, p. 86). No entanto, ao não considerar explicitamente os recursos naturais, tais esquemas representam um ciclo fechado, o que dificulta a análise da influência da escassez de tais recursos sobre a reprodução econômica da sociedade.

Na tabela 4 são apresentados os tempos de trabalho necessários para a geração dos produtos e meios de produção mostrados na tabela 3.

Tabela 4: Esquema de reprodução em tempo de trabalho diretamente aplicado em um sistema econômico com escassez de recurso natural.

	Recurso Natural	Meio de produção 1	Meio de produção 2	Meio de produção 3	Produto
Recurso natural					0
Meio de produção 1	0		1104	2.421,05	920
Meio de produção 2		620			2325
Meio de produção 3			891		9000
Produto final 1		200	300	5.263,16	1000
Produto final 2		100	30	1.315,79	1000
Total	0	920	2325	9000	14245
Excedente	0	0	0	0	

Fonte: elaborado pelo autor.

Conforme se observa na tabela 4, o recurso natural não demanda trabalho para ser produzido. Salientamos que os tempos de trabalho mostrados na tabela 2 são os aplicados diretamente. Por exemplo, o tempo de trabalho indicado para os produtos de consumo final não inclui o tempo de trabalho dedicado à geração dos meios de produção. A reprodução social do sistema em valores monetários é apresentada na tabela 5.

Tabela 5: Esquema de reprodução em valores monetários de um sistema econômico com escassez de recurso natural.

	Recurso Natural	Meio de produção 1	Meio de produção 2	Meio de produção 3	Valor meios de produção	Valor monetário t.	Valor agregado
Recurso natural						230	
Meio de produção 1	230		3680	3220	7130	8050	920
Meio de produção 2		5425			5425	7750	2325
Meio de produção 3			2970		2970	11970	9000
Produto final 1		1750	1000	7000	9750	10750	1000
Produto final 2		875	100	1750	2725	3725	1000
Total	230	8050	7750	11970	28000	42245	14245
Excedente	0	0	0	0			

Fonte: elaborado pelo autor.

É interessante observar que o valor monetário do recurso natural mostrado na tabela 3 é considerado antes da sua extração da natureza, na medida em que é o meio de produção 1 que é gerado a diretamente a partir do recurso natural (por meio da sua extração). Assim, por não exigir trabalho para ser produzido, como mostrado na tabela 5, o seu valor agregado é nulo, sendo o seu valor monetário apenas transferências de valor agregado de outros produtos, ou seja, rendas. Por outro lado, é interessante salientar que o recurso natural, direta ou indiretamente, se constitui em um custo para a geração de outros produtos, o que faz com que o seu preço afete os preços dos produtos gerados pelo trabalho.

Como pode ser observado na tabela 5, o valor agregado pelos meios de produção e pelos produtos finais gerados pelo trabalho corresponde aos tempos de trabalho mostrados nas duas tabelas anteriores. Este resultado mostra que os esquemas de reprodução apresentados nas tabelas 3, 4 e 5 são coerentes com a teoria do valor de Marx. Por outro lado, é importante salientar que, nestes casos, os recursos naturais figuram explicitamente no esquema.

A reprodução do sistema econômico em valores monetários, mostrada na tabela 5, foi obtida pela multiplicação das quantidades físicas mostradas na tabela 3 pelos seus preços, os quais foram calculados por meio de um modelo de programação linear. Este modelo foi formulado a partir dos coeficientes por unidade de produto empregado para calcular os valores da tabela 3. Estes valores são mostrados na tabela 6.

Tabela 6: Tempos de trabalho, recurso natural e meios de produção necessários por unidade de produto

	Produto final 1	Produto final 2	Meio de produção 1		Meio de produção 2		Meio de produção 3	
			Técnica 1	Técnica 2	Técnica 1	Técnica 2	Técnica 1	Técnica 2
Tempo trab./ Quantidade	10	20	2	4	6	10	10	12
Recurso Natural			1	0,5				
Meio de produção 1	1	1			0,8	0,6		
Meio de produção 2	0,5	0,1	0,4	0,2			0,2	0,1

Fonte: elaborado pelo autor

A partir dos coeficientes da tabela 6, da demanda de produtos finais e da quantidade máxima de recurso natural que pode ser utilizada, foi elaborado um modelo de programação linear, cujo problema primal é,

$$Minimizar\ 10\ pf1 + 20\ pf2 + 2\ mp11 + 4\ mp12 + 6\ mp21 + 10\ mp22 + 10\ mp31 + 12\ mp32 \quad (1)$$

Sujeito às restrições

$$demanda\ do\ produto\ 1)\ pf1 \quad >= 100 \quad (2)$$
$$demanda\ do\ produto\ 2)\ pf2 \quad >= 50 \quad (3)$$
$$demanda\ do\ meio\ de\ produção\ 1) - pf1 - pf2 + mp11 + mp12 - 0.8\ mp21 - 0.6\ mp22 \quad >= 0 \quad (4)$$
$$demanda\ do\ meio\ de\ produção\ 2)\ -0.5\ pf1 -0.1\ pf2 -0.4\ mp11 - 0.2\ mp12 + mp21 + mp22 -0.2\ mp31 - 0.1\ mp32 >= 0 \quad (5)$$
$$demanda\ do\ meio\ de\ produção\ 3)\ - 5\ pf1 - 2.5\ pf2 -0.5\ mp11 - 0.7\ mp12 + mp31 + mp32 >= 0 \quad (6)$$
$$demanda\ do\ recurso\ natural) \quad mp11 + 0.5\ mp12 \quad <= 460 \quad (7)$$

onde, (*pf1*) e (*pf2*) são os produtos para consumo final e (*mp1*), (*mp2*) e (*mp3*) são os meios de produção. Os valores mostrados na função a ser minimizada (denominada "função objetivo"), são os tempos de trabalho diretamente aplicados para a geração de cada produto de consumo final e meio de produção. As inequações correspondem às demandas, calculadas com base nas quantidades físicas requeridas para a geração de cada unidade de produto de consumo final e meio de produção. Vale salientar que, como o recurso natural não é gerado pelo trabalho, a quantidade que pode ser utilizada por ciclo de produção (460 unidades) corresponde a uma restrição externa ao funcionamento do sistema econômico. O problema primal, assim, fornece as quantidades a serem produzidas de acordo com as restrições impostas pelas inequações que permitem minimizar o tempo de trabalho, ou seja, o valor. A solução deste problema primal forneceu as quantidades dos produtos de consumo final e dos meios de produção que constam na tabela 3. Esta solução é mostrada na tabela 7.

Tabela 7: Solução do problema primal

	Produto final 1	Produto final 2	Meio de produção 1		Meio de produção 2		Meio de produção 3	
			Técnica 1	Técnica 2	Técnica 1	Técnica 2	Técnica 1	Técnica 2
Tempo de trabalho	1000	1000	920	0	2325	0	6300	2700
Quantidade	100	50	460	0	387,5	0	630	225

Fonte: elaborado pelo autor

A partir do problema primal foi formulado um prolema dual, cuja solução fornece os preços dos produtos que proporcionam o máximo valor monetário possível nas condições técnicas especificadas pelas restrições. Este problema dual é descrito como,

$$\textit{Maximizar } 100\, ppf1 + 50\, ppf2 + 0\, pmp1 + 0\, pmp2 + 0\, pmp3 - 460\, prn \tag{8}$$

Sujeito às restrições

$$pf1)\; ppf1 - pmp1 - 0.5\, pmp2 - 5\, pmp3 <= 10 \tag{9}$$
$$pf2)\; ppf2 - pmp1 - 0.1\, pmp2 - 2.5\, pmp3 <= 20 \tag{10}$$
$$mp11)\; pmp1 - 0.4\, pmp2 - 0.5\, pmp3 - prn <= 2 \tag{11}$$
$$mp12)\; pmp1 - 0.2\, pmp2 - 0.7\, pmp3 - 0.5\, prn <= 4 \tag{12}$$
$$mp21)\; - 0.8\, pmp1 + pmp2 <= 6 \tag{13}$$
$$mp22)\; - 0.6\, pmp1 + pmp2 <= 10 \tag{14}$$
$$mp31)\; 0.2\, pmp2 + pmp3 <= 10 \tag{15}$$
$$mp32)\; - 0.1\, pmp2 + pmp3 <= 12 \tag{16}$$

onde, (*ppf1*) e (*ppf2*) são os preços dos produtos para consumo final, (*pmp1*), (*pmp2*) e (*pmp3*) são os preços dos meios de produção gerados pelo trabalho e (*prn*) é o preço do recurso natural.

É interessante observar que os preços fornecidos pelo problema dual correspondem a variação marginal do valor da função objetivo do problema primal em relação à variação de uma unidade de cada um dos coeficientes do lado direito das suas restrições, consideradas isoladamente. Os preços, portanto, são valores marginais. A solução do problema dual é descrita na tabela 8.

Tabela 8: Solução do problema dual

	Produto 1	Produto 2	Meio de produção 1	Meio de produção 2	Meio de produção 3	Recurso Natural
Valor monetário	10750	3725	0	0	0	-230
Preços	107,5	74,5	17,5	20	14	0,5

Fonte: elaborado pelo autor.

O que torna ativa a restrição de recurso natural, descrita no problema primal pela expressão (7), é a sua escassez. De fato, para que todos os meios de produção e os produtos para consumo final possam ser gerados por meio das técnicas que, diretamente (no caso do meio de produção 1), ou indiretamente (no caso das demais atividades) mais exigem recurso natural (o que caracterizaria a sua abundância) seriam necessárias pelo menos 490 unidades físicas de recurso natural. Por outro lado, é interessante ressaltar que apenas a escassez do recurso natural não é suficiente para alterar os preços. Sem alternativas técnicas, um aumento da escassez tornaria impossível a manutenção do nível de produção e a única forma de manter a reprodução do sistema econômico seria pela diminuição da demanda dos produtos de consumo final. Isto mostra que não é a escassez em si que provoca o aumento dos preços, mas sim o aumento do tempo de trabalho que ela provoca, o qual se manifesta por meio dos preços dos recursos naturais, gerando rendas (Silva Neto, 2018).

Considerações finais sobre a análise macroeconômica

A análise macroeconômica nos mostra que o sentido das relações causais na economia partem das decisões sobre as riquezas sociais tomadas na sociedade em seu conjunto. De acordo com esta análise, os processos responsáveis por estas decisões ainda não podem ser considerados propriamente econômicos, na medida em que decorrem essencialmente dos conflitos relacionados ao acesso às riquezas sociais pelas diferentes classes sociais. É a partir destes processos, que definem a alocação dos recursos e o acesso às riquezas no conjunto da sociedade, que, por meio do tempo de trabalho socialmente necessário à produção, é que são determinados os preços. Estes, por sua vez, no caso em que são determinados a partir do mínimo de tempo de trabalho e caso o produtor adote o valor agregado como critério de decisão, permitem que os recursos alocados nas unidades de produção estejam em conformidade com as decisões tomadas no conjunto da sociedade. Isto ocorre porque tais preços induzem os produtores a adotar as técnicas adequadas a tal alocação dos recursos. É por esta razão, conforme discutido anteriormente, que estes preços e técnicas são denominados eficientes.

É importante salientar que esta relação causal, do macro para o microeconômico, não pode ser invertida. Os preços são definidos na sociedade como um todo (macroeconomicamente) servindo para orientar os produtores em suas unidades de produção (microeconomicamente) e não o inverso. A alocação dos recursos nas unidades de produção só pode ser feita adequadamente por meio de preços, na medida em que a renda dos produtores nas sociedades contemporâneas é expressa em valores monetários.

Os princípios econômicos que regem tal alocação dos recursos que permitem que os produtores obtenham os resultados econômicos de seu interesse (renda máxima ou custo mínimo) é discutido a seguir neste trabalho.

SEGUNDA PARTE: ANÁLISE MICROECONÔMICA DA PRODUÇÃO

Introdução

A análise microeconômica da produção (AMiP) visa a estudar quais decisões a serem tomadas pelos produtores são coerentes com os preços dos produtos e dos meios de produção, de forma que ele obtenha o maior resultado econômico possível. No caso em que tais preços são eficientes e os meios de produção correspondam a produtos gerados pelo trabalho humano ou recursos naturais (doravante denominados simplesmente de "insumos") e as rendas geradas pela escassez dos recursos naturais não seja apropriada pelos produtores, tais decisões tornam-se coerentes com a demanda social, minimizando o tempo de trabalho socialmente necessário nas condições de produção vigentes no conjunto do sistema econômico.

Os métodos aplicados para analisar a produção em nível microeconômico em geral são descritos por manuais baseados na economia neoclássica, sendo nestes denominados "teoria da produção". No entanto, os fundamentos da economia neoclássica são altamente questionáveis, especialmente no que diz respeito à análise da produção[3]. Nesta parte estes métodos serão descritos de forma compatível com o materialismo histórico. Na verdade, como veremos, é a partir desta perspectiva teórica que a análise da produção, em especial a escolha das técnicas que condicionam a alocação dos recursos, em nível microeconômico (isto é, da unidade de produção) pode exibir pertinência com as determinações sobre as riquezas, realizadas em nível macroeconômico sem as inconsistências observadas na economia neoclássica.

A AMiP é realizada por meio de métodos de otimização. Por isto é interessante inicialmente realizar alguns esclarecimentos sobre os pressupostos que regem a aplicação destes métodos.

Pressupostos da otimização

Otimizar um processo é torná-lo o mais eficiente possível em função das condições existentes. A otimização está baseada em alguns pressupostos importantes.

3 Ver por exemplo, GUERRIEN, B.; GUN, O. En finir, pour toujours, avec la fonction de production agrégée ? Jesus Felipe and John S.L. MacCombie, The Aggregate Production Function: 'Not Even Wrong'. **Revue de la regulation** [En ligne], 15, juin 2014, consultado em 20 de abril de 2017, URL: https://regulation.revues.org/10802

O primeiro pressuposto é que o agente otimizador age racionalmente, ou seja, que a preocupação primordial deste agente é obter o melhor resultado possível comparando sistematicamente os resultados obtidos com os recursos consumidos em um processo de produção. Para isto o agente econômico tem que ter um comportamento objetivo, isto é, cujos resultados dependem das condições em que acontece o processo produtivo e não das suas características pessoais (como seu gosto, suas preferências, etc.). Assim, segundo o pressuposto da racionalidade, dois agentes racionais diante de uma mesma situação (e dispondo dos mesmos recursos) devem chegar a resultados semelhantes na otimização de um processo.

O segundo pressuposto é que os resultados obtidos em um processo produtivo são "finalmente" decrescentes. Em outras palavras, a partir de certa quantidade de insumos aplicados obtemos resultados decrescentes, ou seja, nenhum processo produtivo poderá ter resultados infinitos sendo que sempre algum outro recurso além do que está sendo aplicado vai limitar a produção. Por exemplo, a resposta de uma cultura à adubação começa a declinar na medida em que a concentração de adubo torna-se excessiva passando a prejudicar a cultura, fazendo seu rendimento diminuir, como ilustrado na figura 1, na página seguinte.

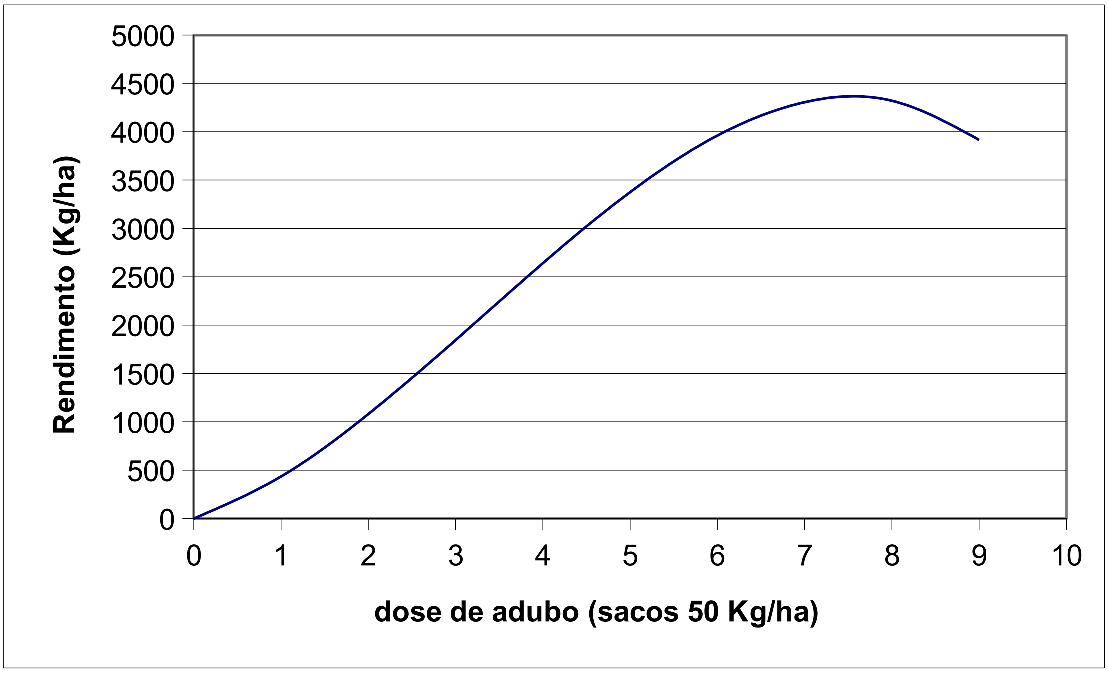


Figura 1: Relação entre doses de adubo (insumo) e produção (produto) de uma cultura

Fundamentos da AMiP

A otimização de um processo produtivo é realizada por meio da análise das relações insumo-produto, insumo-insumo e produto-produto. A análise insumo-produto é realizada para definir qual é a dose de insumo que maximiza o resultado econômico. A análise insumo-insumo é feita para definir, dado certo nível de produção, qual insumo proporciona o maior resultado econômico. Já a análise produto-produto é feita quando queremos saber o que devemos produzir para maximizar o resultado econômico, a partir de uma mesma quantidade (e preço) dos insumos.

Relações insumo-produto

A otimização está baseada em um tipo de cálculo cuja base é o conceito de "produto marginal" (PMa).

O produto marginal é o incremento da produção obtido com o incremento da aplicação de um insumo. Por exemplo, no exemplo acima temos que, para um incremento de adubação de 2 para 4 sacos/ha, temos um incremento de produção de 1080 para 2640 Kg/ha de grãos. Assim o rendimento marginal será:

$$PMa = \frac{2640 - 1080}{4 - 2} = 780 \text{ Kg/saco}$$

Se efetuarmos este cálculo para todos os pontos da curva mostrada na figura 1, observaremos que o produto marginal (PMa) corresponde a taxa de variação do produto total (PT) em relação ao insumo. Matematicamente:

se PT = f(x) então PMa = f´(x); lembrando que f´(x) é a derivada de f(x).

Outro elemento importante para a otimização é o conceito de produto médio (PMe), o qual corresponde ao produto total dividido pela quantidade de insumo aplicado. No nosso exemplo temos,

$$PMe = \frac{2640}{4} = 660 \text{ Kg/saco}$$

Baseado nestes conceitos (PT, PMa e PMe), podemos então estudar em que condições um processo de produção atinge o seu ótimo. Vamos fazer isto através de outro exemplo.

Exemplo 2: Foi obtida a seguinte função de produção para descrever a resposta de uma cultura à adubação: PT = $-50x^3 + 400x^2 - 220x$, analise as relações insumo produto (PT, PMa e PMe) e trace o gráfico correspondente (definindo que para a dose = 0, PMe = 0).

PT = $-50x^3 + 400x^2 - 220x$; PMa = $-150x^2 + 800x - 220$; PMe = -50x2 + 400x – 220

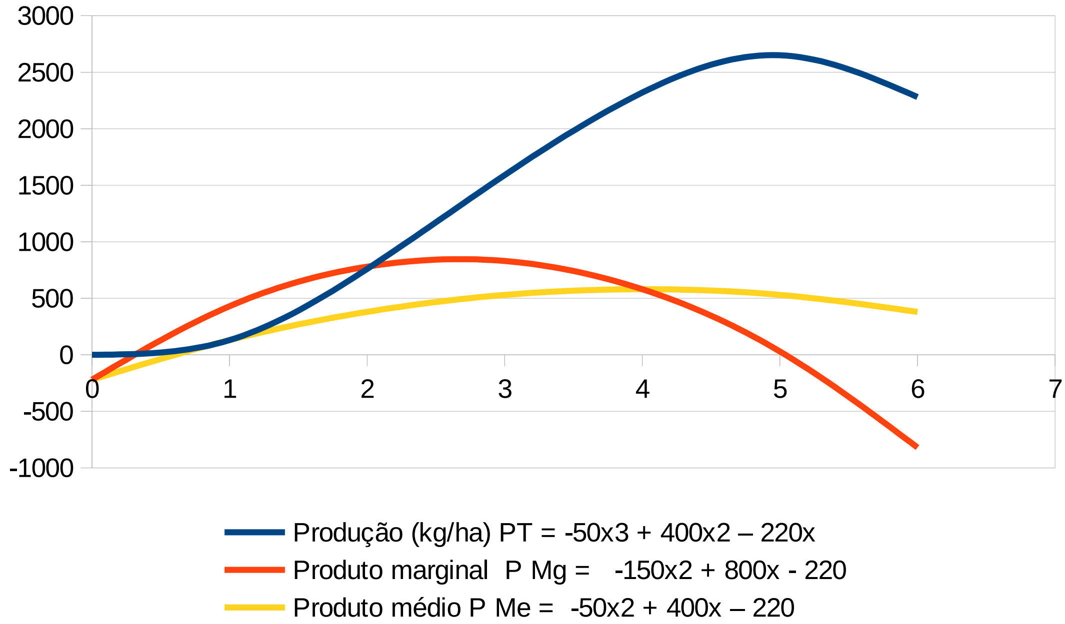


Figura 2: Relações físicas obtidas com o rendimento de uma cultura a partir de doses crescentes de adubo

Os estágios da produção

Observando o gráfico podemos notar que inicialmente PMa > PMe, mas PMa decresce até um ponto em que PMa < PMe e continua decrescendo até que PMa < 0.

Baseado no comportamento das curvas podemos definir os estágios da produção. Assim, vamos chamar de

- estágio I o intervalo em que PMa > PMe

- estágio II quando PMa < PMe e PMa >= 0

- estágio III quando PMa < 0.

Observe que PT é máximo quando PMa = 0.

Considerando que neste processo produtivo temos um insumo fixo, a terra, e um insumo variável, o adubo, os estágios definidos acima nos indicam quando estes insumos estão sendo utilizados adequadamente.

Assim,

- no estágio I, o insumo fixo está sendo utilizado de forma excessiva em relação ao insumo variável (muita terra e pouco adubo). Por isto a produção é ainda muito pequena.

- no estágio III, o insumo variável está sendo utilizado de forma excessiva em relação ao fator fixo (muito adubo para pouca terra). Por isto a produção decresce.

- no estágio II, os insumos fixo e variável estão sendo utilizados de forma equilibrada. Por isto, este estágio é chamado de estágio racional.

Observe que até agora estamos lidando apenas como relações físicas, isto é, não consideramos ainda o preço do insumo nem do produto. Entretanto, baseado apenas nestas relações a TP indica que o ótimo econômico de um processo produtivo estará sempre situado no estágio II (racional).

A definição do ponto ótimo

Observando a figura 2 podemos notar que PT é máximo quando PMa = 0, ou seja, quando não se obtém mais nenhum ganho marginal com a aplicação do adubo é porque se atingiu o máximo da produção. Porém, está é apenas a produção máxima que se pode obter com a aplicação do adubo. Esta seria a produção ótima econômica se o preço do adubo fosse nulo (zero). Porém quanto maoir for o preço do adubo em relação ao preço do produto, mais o ótimo econômico se afastará da produção máxima (permanecendo no segundo estágio da produção).

Para que possamos definir exatamente o ponto ótimo é preciso, portanto, considerar os preços no cálculo das relações insumo-produto. Multiplicando o preço do produto por PT, PMa e PMe obtemos, respectivamente, a receita total (RT), a receita marginal (RMa) e a receita média (RMe).

A dose ótima econômica é aquela em que a receita marginal se iguala com o custo marginal do insumo. Como o custo marginal do insumo é igual ao seu preço, o ponto ótimo econômico é obtido por RMa = preço insumo.

Considerando o exemplo utilizado para ilustrar os estágios da produção, determine a dose ótima econômica a partir de um preço do produto de R$ 1,00/kg e do adubo de R$400,00/saco. As relações monetárias decorrentes deste problema são mostradas na figura 3.

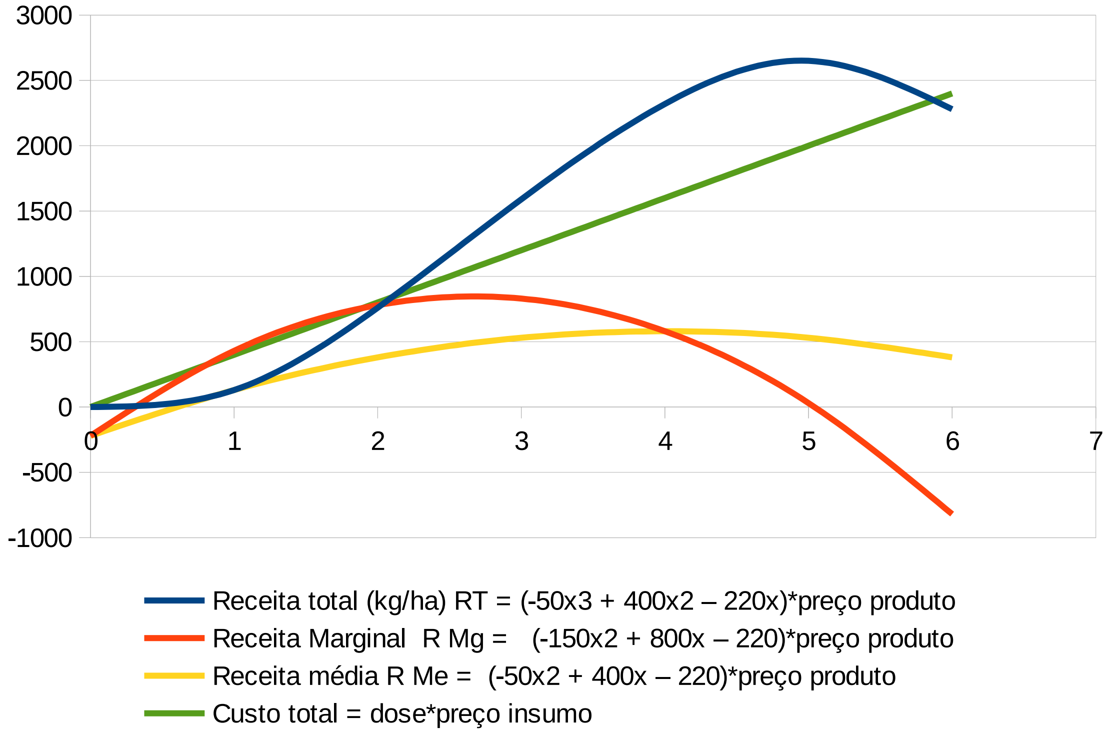


Figura 3: Relações monetárias obtidas a partir do exemplo de resposta de uma cultura à adubação

A dose ótima encontra-se no ponto em que a declividade da curva da Receita total é igual à do custo total. Como a declividade da curva da Receita total corresponde à Receita marginal e a declividade da reta do custo total, ou seja, seu custo marginal, corresponde ao preço, o ponto ótimo é RMa = preço do insumo no segundo estágio da produção = 4,3923 sacos de adubo/ha.

Relações insumo-insumo

Os insumos utilizados em um processo produtivo podem ser:

a) substitutos perfeitos: quanto um insumo pode substituir outro de forma linear para uma mesma quantidade de produto;

b) substitutos imperfeitos: quando a substituição de um insumo por outro ocorre de forma não-linear para a manutenção de uma mesma quantidade de produto;

c) complementares: quando um insumo apenas complementa outro, sem substituí-lo.

Para dois insumos, X1 e X2, a taxa marginal de substituição TMS_{X1X2} é dada por:

$$TMS_{X1x2} = \frac{dX1}{dX2}$$

Para dois insumos substitutos imperfeitos, o ponto ótimo de substituição de um insumo por outro é o ponto em que a taxa marginal de substituição se iguala ao negativo do quociente inverso dos preços dos insumos, ou seja,

$$\frac{dX1}{dX2} = -\frac{PX2}{PX1} \quad \text{ou seja } TMS_{X1X2} = -\frac{PX2}{PX1}$$

Isto pode ser demonstrado considerando-se que a substituição de X1 por X2 será vantajosa se, para uma mesma quantidade de produto,

$$|PX1 * \Delta X1| > |PX2 * \Delta X2|$$

$$\left|\frac{\Delta X1}{\Delta X2} > \frac{PX2}{PX1}\right| \quad \text{, ou} \quad -\frac{\Delta X1}{\Delta X2} > \frac{PX2}{PX1} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta X1}{\Delta X2} > -\frac{PX2}{PX1}$$

No caso de substitutos imperfeitos, na medida em que se vai substituindo X1 por X2, o valor absoluto da TM_{X1X2} vai diminuindo e eventualmente chegará ao intervalo em que

$$\frac{\Delta X1}{\Delta X2} = -\frac{PX2}{PX1}$$

a partir do qual já não há mais vantagem em continuar a substituir X1 por X2.

De forma mais rigorosa, ao invés de um intervalo, podemos determinar o ponto em que a substituição não será mais vantajosa, ou seja, o ponto ótimo de substituição que será,

$$\frac{dX1}{dX2} = -\frac{PX2}{PX1} \quad \text{, c.q.d.}$$

O isocusto é o custo total entre as combinações em que as quantidades de X1 e X2 variam, mas seu custo não se altera. A reta de isocusto que tangencia a curva de produção corresponde ao custo mínimo pelo qual se pode obter certa quantidade fixa de produto. Podemos, assim, visualizar a determinação do ponto ótimo de substituição observando o ponto em que a reta de isocusto tangencia a curva de produção. O isocusto no ponto ótimo é obtido por:

X1*P1 + X2*P2

sendo X1 e X2 as doses ótimas. Assim, dada uma isoquanta em que X2 é o insumo a ser substituído, os pontos correspondentes à X1 são obtidos pelo seu isolamento em relação à X2. Assim, considerando o isocusto como K, os pontos X1 são definidos por,

$$X1 = \frac{K - X2\,P2}{P1}$$

Exemplo:

Considerando dois insumos (milho e mandioca em uma ração, por exemplo) que, para certa quantidade de produto, podem ser combinados conforme a tabela abaixo, sendo seus preços PX1 = 1 e PX2 = 1:

X2	X1	Custo Total (isocusto)
0	12,0792	6,4274
1	8,7121	5,4274
2	5,9834	4,4274
3	3,8931	3,4274
4	2,4412	2,4274
5	1,6277	1,4274
6	1,4526	0,4274
7	1,9159	- 0,5726

O ajustamento de uma curva para relacionar X1 = f(X2), forneceu a seguinte curva de substituição: X1 = 0,3192*X2^2 -3,6863*X2 + 12,0792 e, portanto,

$$\frac{dX1}{dX2} = 0{,}6384*X2 - 3{,}6863.$$

Igualando $\frac{dX1}{dX2}$ ao negativo da relação inversa dos preços temos

0,6384*X2 - 3,6863 = -1

X2 = 4,2079

o que substituindo em 0,3192*X2^2 -3,6863*X2 + 12,0792, nos fornece

X1 = 2,2195

os quais nos fornece o ponto ótimo de substituição de X1 por X2.

Como já mencionado, o isocusto é o custo total entre as combinações em que as quantidades de X1 e X2 variam, mas seu custo não se altera. A reta de isocusto que tangencia a curva de produção corresponde ao custo mínimo pelo qual se pode obter certa quantidade fixa de produto. Podemos, assim, visualizar a determinação do ponto ótimo de substituição observando o ponto em que a reta de isocusto tangencia a curva de produção. No nosso exemplo, o isocusto é 6,4274, cuja reta tangencia a curva de produção 0,3192*X2^2 -3,6863*X2 + 12,0792 no ponto X1 = 2,641 e X2 = 4,2079, como se pode observar na figura 4.

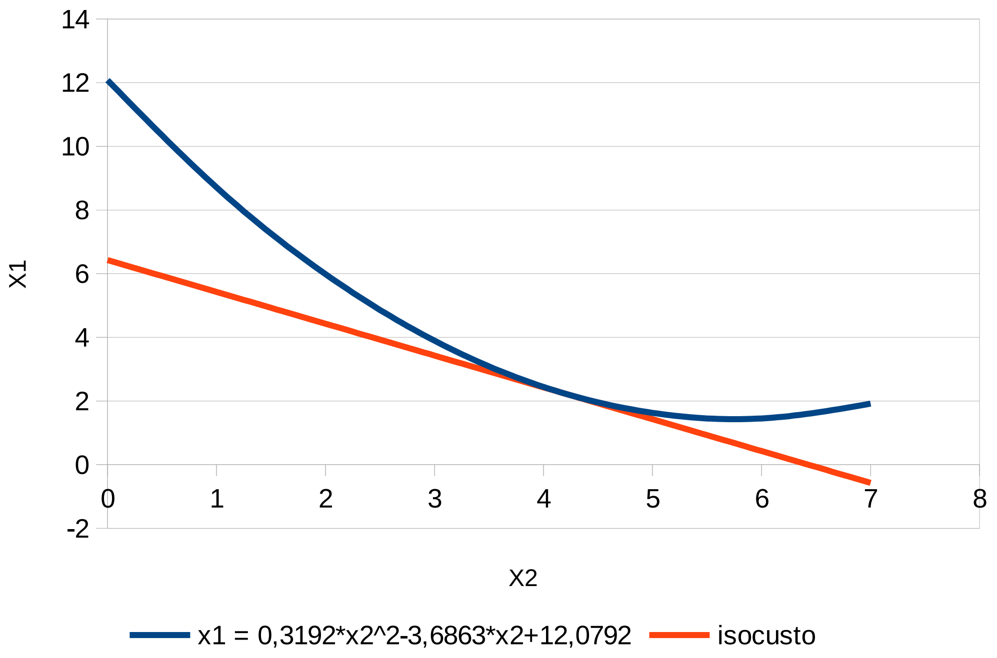


Figura 4: Curva de indiferença e reta de isocusto no ponto ótimo

Relações produto-produto

Em uma unidade de produção podemos ter atividades (ou linhas de produção) que, de acordo, com as relações que elas estabelecem entre si podem ser

a) Concorrentes, quando competem por determinados recursos ou insumos;
b) Complementares, quando fornecem ou recebem recursos de outras atividades;
c) Suplementares, quando não interferem em outras atividades, utilizando recursos que não são utilizados por estas;
d) Conjunta, quando dois ou mais produtos são gerados pela mesma atividade.

Na prática, porém, nem sempre estas relações são claras, com atividades se apresentando como concorrentes para certos recursos e complementares ou suplementares em relação a outros. É por esta razão que a análise das relações produto-produto, embora fundamentada nos mesmos princípios estudados na análise das relações insumo-produto e insumo-insumo, seja, em geral, mais complexa, exigindo ferramentas matemáticas diferentes para a sua aplicação prática. Neste sentido, o cálculo diferencial, embora útil em alguns casos, em geral é substituído pela álgebra linear e não linear, sendo que existem vários programas comerciais que resolvem problemas matemáticos deste tipo.

Para facilitar a compreensão dos princípios econômicos que regem a combinação de atividades em unidades de produção, considere-se inicialmente que uma unidade de produção pode desenvolver as atividades A e B. A atividade A proporciona uma margem de R$ 25,00/ha e a B proporciona R$ 10,00/ha. Por outro lado, dada a disponibilidade de mão de obra do agricultor, a atividade A pode ser cultiva sobre no máximo 20 hectares e a B, sobre no máximo 100 hectares. O agricultor possui 30 hectares.

A combinação ótima das atividades A e B pode ser observada na figura 5 na página seguinte. Nesta figura, a área compreendida pelo polígono formado pelas eixos do gráfico e pelas retas que definem as restrições de área e de trabalho corresponde ao conjunto de soluções admissíveis do sistema. Em outras palavras, todo ponto localizado dentro deste polígono, como por exemplo, o ponto definido pela área de A (eixo x) = 10 e pela área de B (eixo y) = 20 é uma solução admissível, isto é, é uma solução que respeita as restrições de área e de trabalho. Pode-se observar, assim, que cada ponto que se situa sobre a reta que define a restrição de área corresponde a uma combinação das atividades A e B que utiliza toda a área disponível. Da mesma forma, cada ponto que se situa sobre a reta que define a restrição de trabalho corresponde a uma combinação de A e B que utiliza todo o trabalho disponível.

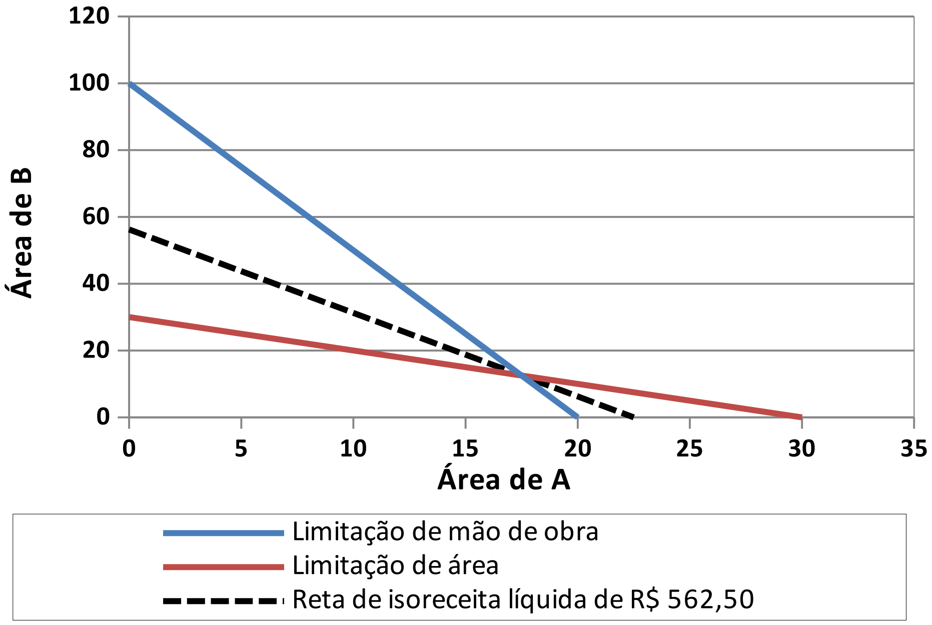


Figura 5: Polígono da soluções admissíveis e combinação ótima entre duas culturas

O ponto de intersecção entre as retas A e B corresponde, portanto, à combinação que utiliza toda a área e o trabalho disponíveis, ou seja, é a combinação que otimiza o uso dos recursos disponíveis, proporcionando, por esta razão, o maior resultado econômico. E é neste ponto que a reta da isoreceita líquida tangencia o polígono das soluções possíveis, o qual é o ponto mais distante da origem x e y = 0. É interessante observar que se a reta de isoreceita líquida tiver a mesma declividade que uma restrição, o sistema apresentará múltiplas soluções ótimas (as quais proporcionarão o mesmo resultado econômico).

Uma propriedade importante do ponto ótimo é que nele as atividades A e B apresentam custo marginal de substituição nulo, isto é, podem substituir uma à outra (em quantidades infinitesimais), sem custos adicionais. Esta propriedade da condição ótima fica mais clara por meio de uma análise do problema matematicamente mais precisa, a qual pode ser feita por meio da programação linear[4]. Assim, dada a maximização de uma função de produção sujeita a restrições, como,

Maximizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

Sujeito às restrições

$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{n1} x_n \leq b_1$

$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{n2} x_n \leq b_2$

...

4 No apêndice são fornecidos alguns elementos básicos sobre a aplicação da programação linear à análise de problemas econômicos.

$$a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \ldots + a_{nm}x_n \leq b_m$$

onde

Z = soma do resultado econômico

x = atividades (1 a n)

c = resultados econômicos (das 1 a n atividades)

a = necessidades de recursos (n atividades * m recursos)

b = recursos disponíveis (1 a m)

Ou de forma mais sintética:

Maximizar cx

Sujeito à

$$Ax \leq b$$

onde

x = vetor de atividades (1 a n)

c = vetor dos resultados econômicos

A = matriz de coeficientes técnicos (n * m)

b = vetor de recursos disponíveis (1 a m)

No exemplo utilizado anteriormente, a aplicação deste modelo forneceria a seguinte formulação,

Maximizar 25 * A + 10 * B {resultado econômico a otimizar}

sujeito às restrições

A + B <= 30 {restrição de área}

5*A + B <= 100 {restrição de mão de obra}

A solução obtida é a mesma indicada no gráfico, isto é, 17,5 unidades da atividade A e 12,5 unidades de B, sendo o resultado econômico fornecido pela função objetivo de 562,5 unidades monetárias. Para a solução deste tipo de problema são utilizados métodos baseados na álgebra linear. Estes métodos baseiam-se no princípio de que, quando as atividades A e B apresentam-se em níveis ótimos, a substituição de uma unidade infinitesimal da atividade A pela B, ou vice-versa, não provoca mudança no valor fornecido pela função objetivo, ou seja, o custo marginal de substituição de cada atividade é nulo. Isto pode ser ilustrado, por exemplo, se considerarmos que, além das atividades A e B, o agricultor pode desenvolver uma atividade C, de forma que o problema se torne,

Maximizar 25 * A + 10 * B + 30 C {resultado econômico a otimizar}

sujeito às restrições

A + B + C <= 30 {restrição de área}

5*A + B + 15 C <= 100 {restrição de mão de obra}

A solução obtida é a mesma do problema anterior, isto é, a atividade C não seria cultivada. O motivo disto é a sua elevada exigência em mão de obra. Assim, o cultivo de um hectare da atividade C, o qual implica a diminuição equivalente da soma da área das demais atividades, provocaria uma diminuição do valor da função objetivo de 32,5 unidades, isto é, o custo marginal de substituição da atividade C é de 32,5 unidades.

É interessante observar que o emprego da programação linear para a análise das relações produto-produto possui uma interpretação econômica interessante. Esta interpretação decorre da transformação do modelo geral descrito anteriormente, denominado problema primal, em outro problema, denominado dual, do que resulta:

Minimizar $D=b_1 y_1+b_2 y_2+\ldots+b_m y_m$

Sujeito às restrições

$$a_{11} y_1+a_{12} y_2+a_{1m} y_m \geq c_1$$

$$a_{21} y_1+a_{22} y_2+a_{2m} y_m \geq c_2$$

...

$$a_{n1} y_1+a_{n2} y_2+a_{am} y_m \geq c_n$$

Assim, a transformação de um problema em sua forma primal para a forma dual tem as seguintes características:

a) se a função objetivo do primal é de maximização, a do dual é de minimização;

b) se as restrições do primal são do tipo < as do dual são do tipo >;

c) os coeficientes dos recursos disponíveis (restrições) do primal são os coeficientes da função objetivo do dual;

d) os coeficientes da função objetivo do primal são os coeficientes das restrições do dual;

e) o número de restrições do primal é igual ao número de variáveis do dual;

f) o número de variáveis do primal é igual ao número de restrições do dual.

e) os resultados totais das funções objetivo do dual e do primal têm o mesmo valor.

Como visto anteriormente por meio dos exemplos numéricos (problemas primais), os valores das variáveis da solução do problema primal correspondem ao nível ótimo das atividades. A partir destes exemplos, assim, pode-se os valores das variáveis da solução dos problemas duais que fornecem a produtividade marginal dos recursos disponíveis. Em outras palavras, a solução do problema dual fornece o quanto aumentaria o resultado da função objetivo do problema primal se houvesse a disponibilidade de uma unidade a mais do recurso em questão (correspondente a uma restrição do problema primal).

Por exemplo, dado o problema primal (já descrito anteriormente),

Maximizar 25 * A + 10 * B {resultado econômico a otimizar}

sujeito às restrições

A + B <= 30 {restrição de área}

5*A + B <= 100 {restrição de mão de obra}

Obtém-se o problema dual,

Minimizar 30 área + 100 trabalho

sujeito às restrições

A) área + 5 trabalho >= 25

B) área + trabalho >= 10

A solução obtida é de 6,25 unidades monetárias por unidade de área e 3,75 unidades monetárias por unidade de trabalho, sendo o valor fornecido pela função objetivo de 562,5 (o mesmo que o fornecido pelo problema primal). Assim, considerando que o modelo descreve uma unidade de produção agropecuária, se houver área que pode ser arrendada anualmente por menos de 6,25 unidades monetárias por unidade de área, seria vantajoso arrendar mais área. O mesmo ocorre com o trabalho, ou seja, caso haja trabalho que possa ser contratado por menos do que 3,75 unidades monetárias por unidade de trabalho seria vantajoso contratar mais mão de obra.

Enfim, há casos, em que a função a ser maximizada ou uma ou mais restrições apresenta relações não lineares (que envolvem multiplicação ou divisão de variáveis) que só podem ser resolvidos por meio da álgebra não linear, mas que apresentam resultados, muitas vezes, menos precisos (ótimos locais, ao invés de ótimos globais no caso linear). A discussão dos aspectos matemáticos da solução de tais problemas ultrapassa, no entanto, os objetivos introdutórios deste texto sendo que, como já mencionado anteriormente, existem vários programas, cuja utilização não requer conhecimentos matemáticos avançados, que solucionam tais problemas (como o Microsoft EXCEL ou o LibreOffice Calc).

Considerações sobre as relações entre a AMiP e o comportamento dos agricultores

As noções de AMiP (aliás, bastante rudimentares[5]) discutidas acima deixam claro que, salvo raras exceções, não existem tecnologias ou sistemas de produção intrinsecamente superiores a outros, todos devendo ser objeto de uma avaliação minuciosa antes de ser adotado (o que, aliás, raramente ocorre sem que adaptações precisem ser realizadas). Por outro lado, a grande maioria das recomendações técnicas sequer leva em consideração as condições em que os agricultores conduzem os seus sistemas de produção, especialmente no que diz respeito às restrições ao seu funcionamento relacionadas ao trabalho, ao uso de equipamentos e até mesmo à disponibilidade de terra, entre outras. Portanto, de um ponto de vista estritamente científico, a AMiP nos indica que expressões como "alta", ou "baixa, tecnologia, "tecnologia moderna" ou "ultrapassada", não fazem sentido algum, sendo que cada técnica ou sistema de produção é, a princípio, o resultado das condições sob as quais eles se desenvolveram, sendo que a sua adoção por um dado agricultor, portanto, deve obedece a uma lógica que tem que ser compreendida antes de se formular qualquer proposta de mudança.

As noções de AMiP discutidas neste texto também nos leva a relativizar certas considerações de ordem puramente cultural ou "sociológica"[6], que muitas vezes são evocadas para explicar o comportamento dos agricultores, especialmente os familiares. Por exemplo, um dos fenômenos mais frequentemente evocados para evidenciar a influência de aspectos culturais ou "sociológicos" (quando não a irracionalidade econômica) sobre o processo decisório dos agricultores é a aparente indiferença muitas vezes observada de certos agricultores em relação ao resultado econômico das atividades, de modo que a oferta de alguns produtos torna-se bastante rígida em relação aos preços.

5 Porque, por exemplo, a incerteza, cujo alto grau se constitui em uma característica fundamental da agricultura, não foi explicitamente considerada neste texto.

6 Entre aspas porque, a nosso ver, o problema não está na sociologia em si, mas no fato desta não ser aplicada adequadamente.

Ora, de acordo com a AMiP, tal indiferença pode ser explicada pela complementaridade no uso dos recursos disponíveis na unidade de produção pelas atividades nela desenvolvidas. E são justamente os agricultores cujos recursos são mais escassos os que, por meio da diversificação, procuram explorar ao máximo a complementaridade dos mesmos. Formalmente, tal problema pode ser analisado considerando-se uma função de produção em que se procura maximizar o resultado econômico de uma unidade de produção agropecuária, descrito, por exemplo, como

Resultado econômico = $10\,x + 40\,y + 80\,z$ (função "objetivo")

Sujeito as restrições, onde cada inequação descreve a utilização de um recurso disponível

Recurso1) $x + 10\,y + 3\,z <= 140$

Recurso2) $2\,x + y + 30\,z <= 330$

Recurso3) $5\,x + 2\,y + z <= 80$

onde

x, y, z = atividades agropecuárias da unidade de produção;

coeficientes das variáveis x, y, z = resultado econômico (na função objetivo) ou uso de recurso (nas restrições) por unidade de escala.

A solução matemática do problema (ponto de máximo da função objetivo) é $x = y = z = 10$, ou seja, todas as atividades possuem a mesma escala, o que, à primeira vista pode parecer contraditório com o fato da atividade "y", por exemplo, proporcionar um resultado econômico por unidade muito maior do que as demais atividades. Além disto, a solução é extremamente estável, com os valores dos coeficientes que expressam o resultado econômico por unidade de "x", "y" e "z" da função objetivo podendo sofrer grandes variações sem afetar a solução. A explicação para tais resultados encontra-se na complementaridade que as atividades apresentam no uso dos recursos disponíveis, como pode ser observado nas inequações que descrevem as restrições em que a atividade "x" é pouco exigente no recurso 1, "y" no recurso 2, e "z" no recurso 3. Sendo assim, o aumento da escala de produção de uma atividade em detrimento de outras, mesmo que estas últimas apresentem resultados econômicos por unidade de escala inferiores, é neste caso antieconômico, ou seja, o que se ganharia com o aumento da escala de uma atividade com maior resultado econômico por unidade não compensaria as perdas decorrentes da diminuição da escala de produção das outras atividades. Tal resultado ajuda a esclarecer porque muitas vezes os agricultores familiares resistem em mudar seus sistemas de produção, mesmo quando tais mudanças parecem vantajosas economicamente. Neste caso, manter um sistema diversificado que permite o uso dos recursos disponíveis de forma complementar é mais vantajoso do que a especialização, mesmo que relativa, na atividade que proporciona o maior resultado econômico, ao ponto de proporcionar uma grande estabilidade ao sistema de produção (estabilidade, aliás, muitas vezes considerada como "teimosia" ou "conservadorismo" por muitos pesquisadores e extensionistas).

A AMiP também nos permite compreender outras especificidades da agricultura familiar (assim como de outros tipos de agricultura, como a capitalista e a patronal) sem que seja necessário recorrer a eventuais particularidades de ordem subjetiva ou cultural que ela apresenta. Por exemplo, sabe-se que, considerando-se a matriz de restrições de *n* atividades * *m* restrições à função de produção, descrita anteriormente na seção relações produto-produto, o sistema ótimo apresentará um número de atividades *n* equivalente ao número de restrições efetivas *m*, isto é, cujos recursos são limitantes. Se, por outro lado, houver uma perfeita mobilidade dos recursos, isto é, se for possível vender certos recursos para adquirir outros (como, por exemplo, dispensar mão de obra para adquirir máquinas), o conjunto de restrições *m* passam a se resumir a uma única restrição e o sistema de produção se especializará na atividade que usa de forma mais rentável o recurso com maiores preços no mercado. Isto explica porque as unidades de produção familiares, cuja mobilidade do trabalho é baixa (o que provoca uma diminuição da mobilidade dos demais recursos), tendem a ser mais diversificadas do que as unidades de produção capitalistas, nas quais há uma alta mobilidade dos recursos (inclusive tendo por base o seu uso fora da atividade agropecuária). Isto explica também porque os agricultores familiares tendem a considerar com mais precisão a disponibilidade de cada recurso disponível em suas unidades de produção (inclusive e, talvez, principalmente, os recursos naturais), procurando utilizá-los da forma mais eficiente possível. Eles simplesmente não têm a opção de compensar as limitações de recursos em suas unidades de produção por uma utilização mais intensiva de recursos adquiridos no mercado. Mas isto ocorre não porque os agricultores familiares, por natureza ou por possuírem uma cultura específica, são "melhores" (ou "piores") do que agricultores de outras categorias sociais, mas simplesmente devido às relações de produção sob as quais eles trabalham. Por exemplo, de acordo com a AMiP um agricultor familiar que, tendo ultrapassado certo nível de capitalização, passa a ser agricultor patronal (isto é, seu sistema de produção passa a depender estruturalmente de mão de obra contratada), tenderá a utilizar de forma diferente os recursos disponíveis na sua unidade de produção. Tal utilização poderá até ser considerada, talvez, menos "ecológica" (pois ele poderá tender a usar mais insumos comprados), independentemente das suas condições subjetivas (ou seja, da sua “cultura”, “consciência” ou “mentalidade”). Neste caso foram as alterações nas relações de produção, ocorridas a partir de mudanças nas condições objetivas do agricultor (maior capitalização), as quais, por sua vez, modificaram a mobilidade dos recursos (possibilidade de dispensar mão de obra) que tenderam a provocar a mudança de comportamento do agricultor.

Sendo assim, o exposto acima nos leva a concluir que a AMiP possui uma importância muito maior do ponto de vista conceitual do que a decorrente das possibilidades da sua aplicação prática, embora estas últimas sejam muito importantes e, em geral, subestimadas. De fato, dada a enorme complexidade da produção agropecuária, raramente é possível formalizar matematicamente os processos técnico-econômicos de maneira suficientemente precisa para que os seus resultados quantitativos possam ser assumidos literalmente. Mas, mesmo nestes casos, o que a AMiP nos ensina é que isto não significa que tais processos técnico-econômicos, objetivamente (isto é, independentemente da vontade do agricultor), não existam e que, sempre, uma análise tão minuciosa quanto possível é necessária para que se possa avaliar o comportamento dos agricultores. E nada impede que, mesmo que levantamentos ou medições precisas não sejam possíveis, o uso de modelos quantitativos possa ser de grande valia, desde que a interpretação dos resultados por eles fornecidos seja realizada com os devidos cuidados.

CONCLUSÃO GERAL: A ALOCAÇÃO DE RECURSOS E A NATUREZA DA CIÊNCIA ECONÔMICA

A alocação de recursos diante da escassez desempenha um papel importante na definição da natureza da ciência econômica, positiva ou negativamente. Por esta razão, para os neoclássicos, a escassez é a questão central da economia. Por exemplo, em um dos manuais mais utilizados no ensino, esta ciência é definida da seguinte forma,

> "A economia estuda como pessoas, empresas, governos e outras organizações de nossa sociedade fazem escolhas. (...) A escassez ocupa um lugar de destaque na economia: as escolhas tem importância porque os recursos são escassos."[7]

Para os neoclássicos, é a partir das escolhas realizadas pelos agentes econômicos como indivíduos isolados que se pode analisar o comportamento da economia como um todo. Sendo estas escolhas racionais, em condições adequadas, o sistema econômico exibiria um comportamento racional, tendendo a um estado ótimo em que a produção seria maximizada e sua distribuição seria realizada de acordo com a contribuição de cada agente para a sua obtenção. Esquematicamente, este processo ocorreria a partir do fato dos indivíduos tomarem as suas decisões baseados na avaliação do grau de escassez de algo que lhe é útil, (o qual é considerado como algo dado, um "bem"), atribuindo-lhe um preço. Assim, entre dois bens alternativos (ou em um processo de troca), o indivíduo poderia tomar uma decisão racional. A agregação das escolhas racionais proporcionaria, assim, racionalidade ao conjunto do sistema econômico, a qual se manifestaria pela sua otimização por meio de preços eficientes. A partir deste pressuposto, a existência de fundamentos microeconômicos é considerada pelos neoclássicos como essencial para a compreensão de qualquer comportamento observado do conjunto do sistema econômico (princípio que ficou conhecido pelo termo individualismo metodológico, já evocado no primeiro capítulo). Uma análise mais precisa deste processo de otimização, porém, revela dificuldades de difícil superação. Ocorre que a otimização do sistema econômico é baseada na equalização entre a utilidade marginal do bem, do ponto de vista do indivíduo, e o seu preço, determinado pelo sistema econômico como um todo. No entanto, no processo de agregação (para o qual raramente é fornecida qualquer explicação sobre os seus mecanismos), o preço é obtido a partir da utilidade marginal dos indivíduos. Esta questão será retomada mais adiante neste capítulo, o importante aqui é salientar as dificuldades levantadas pela tentativa de separar decisões individuais de decisões coletivas, atribuindo as primeiras uma absoluta primazia sobre as segundas, como entre os neoclássicos, o que implica em isolar os indivíduos das relações sociais nas quais ele está envolvido.

---

7 Stiglitz, J.; Walsh, C. Introdução à Microeconomia. Rio de Janeiro: Ed. Campus, 2003, p. 8-9.

Na perspectiva do materialismo histórico, adotada neste texto, é impossível conceber os indivíduos isolados das condições sociais que os determinam, na medida em que estas são as responsáveis pela própria individualidade. A emergência e a evolução da individualidade baseiam-se nas possibilidades abertas pelo processo de trabalho, o qual se constitui, de acordo com o materialismo histórico, no processo ontológico fundamental do ser social.[8] Assim, não há indivíduo sem sociedade. O acesso dos indivíduos aos produtos gerados pelo trabalho e aos recursos naturais depende da sua condição de classe determinada a partir de relações de produção, de propriedade e de troca. A repartição dos produtos do trabalho e dos recursos naturais entre as classes sociais ocorre antes que os indivíduos possam realizar as suas escolhas. É neste processo social de repartição que são determinados os preços. No modelo proposto, isto está expresso pelo fato do perfil da demanda de produtos do trabalho e a quantidade de recursos naturais a serem variáveis exógenas, o que possibilita interpretá-las como determinadas por relações sociais de produção e de propriedade e pelo estado das lutas de classes que ocorre a partir das mesmas. Apenas a partir dos preços assim definidos é que os agentes econômicos podem efetuar suas escolhas. Mas isto exclui a atribuição de uma racionalidade global ao sistema econômico, especialmente no capitalismo, no qual as próprias relações sociais que lhe são características podem se constituir em um obstáculo a formação de preços eficientes, gerando contradições entre a geração de riquezas sociais e a satisfação das necessidades da sociedade, assim como em relação a sua sustentabilidade ecológica. São estas contradições que se originam a instabilidade e as recorrentes crises do capitalismo. Por outro lado, é importante salientar que a determinação social do acesso às riquezas não elimina a liberdade dos indivíduos. Os preços não determinam rigidamente, mas orientam as escolhas dos agentes econômicos. Como visto no primeiro capítulo, o marco distintivo da espécie humana é que ela não reage mecanicamente às suas condições de existência, mas cria novas alternativas na medida em que progride o seu conhecimento sobre os processos causais que, ao lado das posições teleológicas, integram o processo de trabalho.

Diante do exposto nos parágrafos anteriores, é impossível não concordar com Marx quando este denuncia a vulgarização da economia, sustentando a posição da economia política como estudo das relações sociais que determinam a produção e a distribuição de riquezas, contra a economia vulgar que se concentra sobre o problema da escolha em condições de escassez, isolando a ciência econômica das relações sociais. Mas isto levou os marxistas a negligenciar o problema da escassez, como se este implicasse necessariamente nos pressupostos neoclássicos. Esta negligência não encontra qualquer respaldo no materialismo histórico, como pode ser constado por meio do modelo baseado na teoria do valor de Marx apresentado.

---

8 LUKÁCS, G. **Para uma ontologia do ser social I.** São Paulo: Boitempo, 2013

A compreensão da natureza da economia, especialmente no que diz respeito às categorias da riqueza, do valor e do preço, é crucial na análise de sistemas de produção. Isto porque, de uma maneira geral, há uma enorme confusão sobre as diferenças de significado entre estas três categorias. Mesmo entre marxistas, quase sempre o valor é considerado como um indicador de riqueza, sendo que a determinação dos preços a partir da equalização das taxas de lucro (forma como ela é tradicionalmente considerada pelos marxistas) de pouca serventia. Entre os neoclássicos a confusão é ainda maior na medida em que para esta corrente da economia, fundamentalmente, não há diferença entre valor e preço.

A compreensão das diferenças entre as categorias da riqueza, do valor e do preço é incontornável para que se saiba significado resultado econômico proporcionado por um sistema de produção. Além disto, a compreensão de que os preços, mais do que um simples intermediário para as trocas é, também, uma fonte de informação para os agentes microeconômicos (e que tipo de informação é esta) é de suma importante para que se possa avaliar com precisão as consequências de uma intervenção sobre um sistema de produção.

REFERÊNCIAS

DÜPPE, T. **Koopmans in the Soviet Union. A travel report of the summer of 1965.** Journal of History of Economic Thought, Vol. 38, Issue 1, 2016

JEVONS, S. **The theory of Political Economy.** New York: Augustus M. Keller, Bookseller (Reprints of economic classics), 1965.

LUKÁCS, G. **Para uma ontologia do ser social I.** São Paulo: Boitempo, 2013.

ROSDOLSKY, R. **The making of Marx' "Capital".** Translated by Pete Burgess. London: Pluto Press Limited, 1977, 581 p.

SILVA NETO, B.; **Agroecologia e análise econômica de sistemas de produção:** uma abordagem baseada no materialismo histórico e dialético. Cerro Largo, Ed. UFFS, 2016.

SILVA NETO, B. A importância das rendas diferenciais na teoria dos preços de Marx. **Desenvolvimento em Questão**, ano 16, número 44, p. 9-41, jul/set 2018.

STIGLITZ, J.; WALSH, C. Introdução à Microeconomia. Rio de Janeiro: Ed. Campus, 2003.

Apêndice: a programação linear

A modelagem por meio da programação linear apresenta características matemáticas que possibilitam aplicações a sistemas econômicos muito mais amplas do que os usuais modelos baseados no cálculo da inversão de matrizes ou de autovalores. Ocorre que os modelos de programação linear não precisam ser elaborados por meio de matrizes quadradas (isto é, que possuem o mesmo número de linhas e de colunas). Embora também seja um método de aplicação do cálculo matricial, que requer matrizes quadradas, os métodos de programação linear geram automaticamente variáveis que preenchem a matriz para torná-la tratável matematicamente. Uma consequência deste procedimento, que também representa uma grande vantagem na modelagem, é que os modelos podem ser formulados por meio de inequações, o que permite considerar alternativas técnicas que não necessariamente integrarão a solução fornecida pelo modelo. Isto permite a modelagem de genuínos processos de escolha, o que, por sua vez, é viabilizado pelo fato da programação linear se constituir em um método de otimização.

Outra grande vantagem é a robustez matemática das soluções obtidas pelos métodos de cálculo empregados pela programação linear, os quais são facilmente realizados até mesmo por computadores de modesta capacidade de processamento. Assim, todos os modelos formulados neste ensaio podem ser resolvidos por meio do suplemento de programação matemática presente nos aplicativos de planilha eletrônica usualmente adotados (por exemplo, pelo comando “Solver” do Microsoft Excel e do LibreOffice Calc). Em alguns raros casos, as planilhas eletrônicas apresentam soluções apenas aproximadas. O programa LpSolve, disponível em livre acesso em https://sourceforge.net/projects/lpsolve/, fornece soluções mais precisas (recomendamos empregar a linguagem LINDO, a qual é muito próxima da forma como os exemplos numéricos são apresentados no ensaio) e pode ser empregado para a modelagem de problemas de grandes dimensões (dezenas de milhares de variáveis e expressões).

Um modelo de aplicação da programação linear à análise econômica pode ser formulado de forma genérica da seguinte maneira:

Maximizar a função objetivo $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n$

Sujeita às restrições

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{n1}x_n \leq b1$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{n2}x_n \leq b_2$$
$$...$$
$$a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + ... + a_{nm}x_n \leq b_m$$

onde,

Z = soma do resultado econômico

x = atividades (1 a n)

c = resultados econômicos das atividades (1 a n)

a = necessidades de recursos das atividades (1 a n)

b = recursos disponíveis (1 a m)

Uma forma mais sintética de formular um problema de programação linear pode ser elaborada por meio de vetores e matrizes. Assim, a formulação acima ficaria,

Maximizar função objetivo $Z = cx$

Sujeita às restrições

$$Ax \leq b$$

onde,

c = vetor dos resultados econômicos

x = vetor de atividades

A = matriz de coeficientes técnicos

b = vetor de recursos disponíveis

Ao invés de procurar maximizar a função objetivo, pode-se pretender minimizá-la. Neste caso pelo menos uma das restrições deve ser limitante à convergência da solução para zero, o que normalmente é feito por uma restrição " >= b" (e não apenas " <= b", como no problema de maximização).

A solução do modelo seleciona as variáveis x_n, e fornece os seus valores que maximizam a função objetivo. As variáveis x_n selecionadas compõem a "base ótima" da solução do problema. Se não houver uma mudança na composição da base ótima da solução, a variação do valor da função objetivo Z é linear em relação à variação dos coeficientes b_m das restrições. Com a mudança da base ótima, a declividade da reta que descreve o comportamento da solução em relação à variação dos coeficientes b_m das restrições é alterada.

Uma forma precisa de saber quais restrições são ativas na seleção e determinação dos valores das variáveis x_n é por meio da dedução de um problema denominado "dual" a partir do problema descrito acima, denominado "primal". O problema dual possui as seguintes características,

a) se a função objetivo do primal é de maximização, a do dual é de minimização, e vice-versa;

b) se as restrições do primal são do tipo <, as do dual são do tipo >, e vice-versa;

c) os coeficientes dos recursos disponíveis (restrições) do primal são os coeficientes da função objetivo do dual;

d) os coeficientes da função objetivo do primal são os coeficientes das restrições do dual;

e) o número de restrições do primal é igual ao número de variáveis do dual;

f) o número de variáveis do primal é igual ao número de restrições do dual.

e) os resultados totais das funções objetivo do dual e do primal têm o mesmo valor.

Aplicando estas regras, a formulação do problema dual do modelo é,

Minimizar $D = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$

Sujeito às restrições

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1m}y_m \geq c_1$$
$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2m}y_m \geq c_2$$
$$\ldots$$
$$a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nm}y_m \geq c_n$$

onde, além das variáveis definidas no problema primal,

y_m = variação marginal da função objetivo do problema primal pela alteração da restrição b_m

A solução do problema dual possui uma interpretação econômica importante. Assim, enquanto os valores das variáveis selecionadas para compor a solução do problema primal correspondem ao nível ótimo das atividades, o valor das variáveis da solução dual fornece a variação marginal dos coeficientes do lado direito das restrições. Em outras palavras, a solução do problema dual fornece o quanto aumentaria o resultado da função objetivo do problema primal se houvesse a disponibilidade de uma unidade a mais do recurso representado pelo coeficiente uma dada restrição (também do problema primal), considerada isoladamente..

Esta interpretação suscitou um enorme entusiasmo dos neoclássicos pela programação linear. Aparentemente ela aporta uma evidência incontestável da abordagem marginalista da formação dos preços por eles defendida. No entanto, logo as contradições ficaram claras. Para que o problema dual possa fornecer os preços, a função objetivo do problema primal deve ser formulada considerando a utilidade dos produtos em termos físicos, mas por meio de uma unidade comum. Mas a utilidade é uma noção subjetiva. Não é possível encontrar uma unidade comum para comparar a utilidade de dois produtos de consumo final e menos ainda de meios de produção e de recursos naturais. O argumento normalmente avançado pelos neoclássicos é que não é a utilidade em si, mas a utilidade marginal que define a verdadeira utilidade de um produto. Mas a utilidade marginal não pode ser empregada para formular a função objetivo do problema primal, na medida em que ela deveria ser fornecida pela solução do problema dual, correspondendo assim aos preços. Vale assinalar, no entanto, que muito antes do desenvolvimento da programação linear os neoclássicos já se debatiam com o problema da falta de uma medida comum para a utilidade. Stanley Jevons, um dos primeiros teóricos neoclássicos, já em 1870 chega a indicar que a utilidade poderia ser medida negativamente, por meio da "desutilidade" do trabalho, afirmando que isto colocaria sua teoria em uma forma mais geral, ao dizer que,

> "Eu tenho expressado o sentimento em mais do que um lugar que toda a teoria poderia provavelmente ter sido colocada em uma forma mais geral tratando o trabalho como uma desutilidade, e assim colocando-a sob as ordinárias equações de troca."[9]

Evidentemente, esta possibilidade foi descartada pelos neoclássicos, pois ela implicaria no abandono da sua crítica à consideração do trabalho como fundamento do valor, o que os impediria de fazer a vergonhosa apologia do capitalismo que lhes é característica.

A redundância da teoria dos preços proposta pelos neoclássicos revelada pela programação linear fez com ela fosse praticamente por eles abandonada para a análise da determinação dos preços, que procuraram outras abordagens matemáticas (sempre problemáticas) para elaborar seus modelos de equilíbrio. A programação linear ficou confinada a problemas microeconômicos, nos quais os valores da solução dual são calculados a partir dos valores monetários que constam no problema primal. É por esta razão que os neoclássicos denominam de "preços sombra" os que são definidos pelo problema dual, isto é, são preços que, de acordo com os neoclássicos, não são verdadeiros preços, mas apenas uma (fantasmagórica) "sombra" dos preços.

Mesmo um economista neoclássico de grande prestígio, como Tjalling Charles Koopmans, que viria a ganhar o prêmio Nobel de economia em 1975 justamente por suas pesquisas sobre modelos de "análise de atividades" (como os neoclássicos em geral denominam a programação linear), não sabia ao certo como interpretar os multiplicadores de Lagrange (os valores duais em seu sentido matemático). Expressando a opinião geral dos economistas, Koopmans admitia que os multiplicadores de Lagrange podiam, mas não deviam (!), ser identificados como preços. Na dúvida entre denomina-los de "valores" (um termo definitivamente fora de moda entre os neoclássicos) e "preços sombra", finalmente decidiu por esta última expressão[10].

Vale salientar que os "preços sombra" fornecidos pela solução do problema dual, como visto ao

---

9 "I have expressed a feeling in more than one place that the whole theory might probably have been put in a more general form by treating labour as a negative utility, and thus bringing it under the ordinary equations of exchange." JEVONS, S. **The theory of Political Economy.** New York: Augustus M. Keller, Bookseller (Reprints of economic classics), 1965, prefácio à segunda edição de 1879.

10 DÜPPE, T. **Koopmans in the Soviet Union. A travel report of the summer of 1965.** Journal of History of Economic Thought, Vol. 38, Issue 1, 2016, p. 81-104.

longo deste texto, são bastante úteis do ponto de vista microeconômico. Por exemplo, um agricultor pode definir se a produtividade marginal de suas terras justifica economicamente o arrendamento de mais área, dado o preço do arrendamento. Mas de um ponto de vista macroeconômico (no qual os preços são definidos), os preços da terra (ou do seu arrendamento) não podem ser definidos com base na sua utilidade, por esta não poder ser expressa de forma consistente na função objetivo do problema primal. As contradições discutidas ao longo deste texto relativas ao papel do lucro na definição dos preços possuem essencialmente essa mesma natureza.