

No início dos anos 1970, Morishima (1973) foi um dos principais autores a propor que o valor-trabalho poderia ser calculado por meio de modelos de programação linear cujo problema primal minimiza o tempo de trabalho. Como os valores-trabalho neste caso corresponderiam aos resultados do problema dual, Morishima (1973) denominou tal abordagem de “teoria dual do valor”. Com base nesta teoria, considera-se em geral que modelos de programação linear que minimizam o tempo de trabalho sempre fornecem valores-trabalho, mesmo quando esses modelos consideram a possibilidade de escassez de recursos naturais. Reforça esta interpretação o fato da equalização da taxa de lucro ser considerada por marxistas e neoricardianos em geral como o único processo responsável pela formação dos preços.

Este papel exclusivo da equalização das taxas de lucro na formação dos preços, porém, vem sendo contestada por vários autores cujas abordagens são corroboradas por trabalhos empíricos nos quais, estatisticamente, não foi possível detectar qualquer tendência à equalização das taxas de lucro na economia (FARJOUN; MARCHOVER, 1983, MARCHOVER, 2011, ZACHARIA, 2006). Por outro lado, esses trabalhos detectaram uma correlação inversa entre preços e tempo de trabalho, corroborando a lei do valor enunciada por Marx (COCKSHOT, COTTRELL e MICHELSON, 1993; COCKSHOT, 2011; ZACHARIAH, 2006).

O objetivo desta nota de pesquisa é demonstrar que o cálculo de valores-trabalho por meio do procedimento proposto por Morishima (1973) é restrito a condições muito específicas, não possuindo, assim, a generalidade suficiente para fundamentar uma teoria dual do valor-trabalho. Neste sentido entendemos que os resultados fornecidos pela solução dual de modelos de programação linear cujo problema primal minimiza o tempo de trabalho devem ser denominados de preços e não de valores-trabalho. Corroborando os resultados dos autores citados anteriormente que contestam a exclusividade da equalização das taxas de lucro na formação dos preços, considera-se, assim, que tal formação pode ser influenciada, mas não fundamentalmente determinada pela equalização das taxas de lucro. Esta consideração torna-se ainda mais importante quando se procura analisar o papel das rendas diferenciais geradas pela escassez de recursos naturais na formação dos preços, conforme (SILVA NETO, 2017).

Esta nota de pesquisa, além desta introdução e das conclusões, compreende duas partes, além desta introdução e das conclusões. Na primeira parte é demonstrado que o procedimento proposto por Morishima (1973, 184-185) para o cálculo de valores-trabalho só pode ser considerado válido em condições muito específica, altamente abstratas e irrealistas. Na segunda parte são

discutidas algumas situações comumente observadas na realidade, cuja modelagem a partir do procedimento proposto por Morishima (1973) não fornece valores-trabalho.

O modelo de Morishima

O problema primal do modelo de Morishima é

$$\text{Minimizar } Lx \quad (1)$$

sujeito às restrições

$$(B_I - A) x \geq Y_I \quad (2)$$

$$B_{II} x \geq Y_{II} \quad (3)$$

onde,

$L$  = vetor dos tempos de trabalho necessários à produção

$x$  = vetor das quantidades produzidas

$B_I$  = matriz de coeficientes técnicos dos meios de produção necessários para a geração de meios de produção

$A$  = matriz dos coeficientes técnicos dos meios de produção necessários para a geração de produtos de consumo

$Y_I$  = vetor dos excedentes dos meios de produção necessários para a geração de meios de produção para a geração dos produtos de consumo

$B_{II}$  = matriz dos coeficientes técnicos dos produtos de consumo

$Y_{II}$  = vetor das quantidades demandadas de produtos de consumo

E o problema dual é,

$$\text{Maximizar } \lambda_I Y_I + \lambda_{II} Y_{II} \quad (4)$$

sujeito às restrições

$$\lambda_I (B_I - A) + \lambda_{II} B_{II} \leq L \quad (5)$$

onde, além das variáveis já definidas,

$\lambda_I$  = valor-trabalho dos meios de produção

$\lambda_{II}$  = valor-trabalho dos produtos de consumo

De fato, na forma como foi descrito nos parágrafos anteriores se pode considerar que os resultados ( $\lambda_I$  e  $\lambda_{II}$ ) fornecidos pelo problema dual são valores-trabalho, na medida em que, nas condições ótimas,

$$\lambda_I Y_I + \lambda_{II} Y_{II} = Lx \quad (6)$$

Um grave inconveniente do modelo de Morishima é que, ao não considerar alternativas técnicas, ele implica em curvas de oferta totalmente inelásticas em relação a quantidade produzida. Assim, os valores-trabalho dos produtos (ou seja, o tempo de trabalho por unidade de produto) não

se alterariam no caso de um aumento da demanda, o que pode ser considerado como uma condição altamente restritiva à aplicação do modelo (na medida em que as curvas de oferta geralmente são crescentes).

Para que esta condição possa ser relaxada, é necessário introduzir os recursos naturais no modelo. Isto pode ser feito adicionando a seguinte restrição no problema primal,

$$x C \leq R \quad (7)$$

onde,

$C$  = matriz de coeficientes técnicos que expressam a necessidade de recursos naturais por unidade de produto (inclusive meios de produção).

$R$  = vetor que expressa a disponibilidade de recursos naturais.

É forçoso reconhecer que os resultados fornecidos pelo problema dual já não correspondem a valores-trabalho. Isto porque, neste caso a expressão (4) se torna,

$$\text{Maximizar } A_I Y_I + A_{II} Y_{II} - r R \quad (8)$$

onde  $r$  é o vetor das rendas diferenciais geradas a partir da escassez dos recursos naturais  $R$ .

E, portanto,

$$\text{Mínimo } Lx = \text{Máximo } A_I Y_I + A_{II} Y_{II} - r R \quad (9)$$

ou, seja, nas condições ótimas,

$$A_I Y_I + A_{II} Y_{II} = Lx + r R \quad (10)$$

Há, porém, uma forma de calcular os valores-trabalho por meio do modelo de Morishima quando há escassez de recursos naturais e alternativas técnicas. Uma forma de calcular os valores-trabalho é obter a solução do modelo completo e, depois, dele retirar as técnicas de produção que não constam na base ótima. A solução do problema dual no novo modelo assim obtido fornece valores-trabalho. É importante salientar que este resultado pode ser obtido porque a retenção no modelo de apenas uma técnica para cada produto implica em deixar de considerar a escassez de recurso natural e, portanto, a formação de rendas. De fato, na ausência de alternativas técnicas, ou o recurso natural é abundante ou a técnica disponível não permite que a demanda de produtos de consumo final seja satisfeita (conforme determina a expressão 3), o que torna a solução inviável.

A questão que se coloca é se estes valores-trabalho são, em termos relativos, os mesmos do fornecido pelo modelo completo para produtos de consumo final que não dependem diretamente de recursos naturais para serem produzidos. A expressão do modelo na forma de somatórias pode contribuir para mostrar com mais clareza que o processo de agregação nele representado faz com que, mesmo em termos relativos, os valores duais fornecidos pelo modelo completo não correspondem a valores-trabalho.

Assim, considerando que,

$$Ax = \begin{matrix} a_{11} & a_{21\dots} & a_{n1} & x_1 \\ a_{12} & a_{22\dots} & a_{n2} & x_2 \\ a_{1m} & a_{2m\dots} & a_{nm} & \dots \\ & & & x_n \end{matrix} = \sum a_{nm} x_n$$

Especificando as diferentes técnicas e produtos se pode formular o problema primal do modelo de Morishima considerando a possibilidade de escassez de recursos naturais como,

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \quad \sum c_i^l q_i^l + \sum c_z^x k_z^x \\ & \text{Sujeita às restrições} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sum q_i^l \geq D_i \quad (12)$$

$$\sum k_z^x - \sum a_{iz}^l q_i^l \geq K_z \quad (13)$$

$$\sum \sigma_{jz}^x k_z^x \leq R_j \quad (14)$$

onde,

$c_i^l$  = quantidade  $c$  de trabalho necessária por unidade do produto  $i$  com a técnica  $l$ .

$q_i^l$  = quantidade  $q$  do produto  $i$  produzido com a técnica  $l$ .

$c_z^x$  = quantidade  $c$  de trabalho necessário por unidade de meio de produção  $z$  produto com a técnica  $x$ .

$k_z^x$  = quantidade  $K$  do meio de produção (gerado pelo trabalho)  $z$  com a técnica  $x$ .

$a_{iz}^l$  = quantidade  $a$  do meio de produção  $z$  necessária para a produção de uma unidade do produto  $i$  com a técnica  $l$ .

$D_i$  = quantidade demandada  $D$  de produto  $i$ .

$K_z$  = excedente  $K$  do meio de produção  $z$  necessário para o crescimento econômico

$\sigma_{jz}^x$  = quantidade  $\sigma$  de recurso natural  $j$  necessário para a produção do meio de produção  $z$  com a técnica  $x$ .

$R_j$  = quantidade máxima  $R$  a ser utilizada do recurso natural  $j$ .

O problema dual, obtido a partir do problema primal, é formalizado como,

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} \quad \sum p_i D_i + \sum \beta_z K_z - \sum r_j R_j \\ & \text{Sujeita às restrições} \end{aligned} \quad (15)$$

$$p_i - \sum a_{iz}^l \beta_z \leq c_i^l \quad (16)$$

$$\beta_z - \sum \sigma_{jz}^x r_j \leq c_z^x \quad (17)$$

onde, além das variáveis do problema primal, já descritas, temos,

$p_i$  = preço do produto  $i$ .

$\beta_z$  = preço do meio de produção (gerado pelo trabalho)  $z$ .

$r_j$  = preço do recurso natural  $j$ .

De acordo com o teorema da dualidade, com as soluções ótimas temos,

$$\text{Mínimo } \sum c_i^l q_i^l + \sum c_z^x k_z^x = \text{Máximo } \sum p_i D_i + \sum \beta_z K_z - \sum r_j R_j \quad (18)$$

Por meio da notação por somatórias do modelo de Morishima observa-se por meio das expressões (16) e (17) que ao longo do processo de agregação de valor as rendas relacionadas a escassez de recursos naturais se transmitem aos preços dos meios de produção e aos produtos de consumo final que, direta e indiretamente, dependem desses recursos para serem produzidos. Sendo assim, os preços fornecidos pelos modelos diferem dos valores-trabalho mesmo quando estes últimos são calculados considerando cada produtos e técnica da base ótima de forma isolada, conforme descrito anteriormente.

Um exemplo numérico será discutido para ilustrar esses resultados. O problema primal do modelo consiste em minimizar o tempo de trabalho para a geração de dois produtos de consumo ( $a$  e  $b$ ) e um meio de produção ( $k$ ), sendo que a produção deste último depende de um recurso natural. Cada produto de consumo final pode ser gerado a partir de duas técnicas diferentes. Este problema pode ser descrito como.

$$\text{Minimizar } 2 a1 + 8 a2 + 10 b1 + 20 b2 + k \quad (19)$$

*Sujeita às restrições*

$$\text{demanda de a) } a1 + a2 \geq 1 \quad (20)$$

$$\text{demanda de b) } b1 + b2 \geq 1 \quad (21)$$

$$\text{demanda de k) } - 8 a1 - 4 a2 - 3 b1 - b2 + k \geq 0 \quad (22)$$

$$\text{demanda de recurso natural) } k \leq 5 \quad (23)$$

O problema dual do modelo consiste em maximizar o valor agregado, determinando os preços dos produtos de consumo final ( $pa$  e  $pb$ ), do meio de produção ( $pk$ ) e a renda relacionada a escassez do recurso natural ( $rn$ ). Este problema é descrito como,

$$\text{Maximizar } pa + pb + 0 pk - 5 rn \quad (24)$$

Sujeito às restrições

$$a1) pa - 8 pk \leq 2 \quad (25)$$

$$a2) pa - 4 pk \leq 8 \quad (26)$$

$$b1) pb - 3 pk \leq 10 \quad (27)$$

$$b2) pb - pk \leq 20 \quad (28)$$

$$k) pk - rn \leq 5 \quad (29)$$

A solução fornecida pelo modelo completo e os valores-trabalho obtidos considerando apenas as atividades eficientes são mostrados na tabela 1.

Tabela 1: Solução do modelo e valores-trabalho

	Quantidades físicas	Preços e renda	Valores-trabalho
Tempo de trabalho e valor agregado	33	33	33
a1 (produto de consumo final (a) com a técnica 1)	0	28	0
a2 (produto de consumo final (a) com a técnica 2)	1		12
b1 (produto de consumo final (b) com a técnica 1)	0	25	0
b2 (produto de consumo final (b) com a técnica 2)	1		21
k (meio de produção)	5	5	1
rn (recurso natural)	5	4	0

Fonte: elaborado pelo autor

Observa-se na tabela 1 que, dentre os produtos de consumo final, apenas as técnicas que exigem mais trabalho (como mostra a função objetivo do problema primal) fornecem uma produção não nula. Isto ocorre devido a escassez de recurso natural. Esta escassez é o que gera a renda relacionada ao recurso natural observada na tabela 1. Vale salientar que a origem desta renda é que escassez provocou a adoção das técnicas mais poupadoras de meio de produção, porém que exigem mais tempo de trabalho.

Comparando os valores fornecidos pela solução do modelo completo, com os valores-trabalho observa-se que os valores duais fornecidos pelo modelo são diferentes dos fornecidos quando apenas as técnicas da base ótima são consideradas (para fornecer os valores-trabalho). Isto ocorre tanto em termos absolutos, como em termos relativos (na medida em que  $28/25 \neq 12/21$ ).

Estes resultados mostram claramente que os valores duais do modelo, mostrados na tabela 1, não correspondem a valores-trabalho.

É importante salientar que os preços são informações que orientam os agentes econômicos na escolha de técnicas para a alocação dos recursos disponíveis nas unidades de produção. Neste sentido, de acordo com a teoria marxista do valor as técnicas consideradas “eficientes” são as que tornam ativas as inequações relativas às expressões (16) e (17) (SILVA NETO, 2020, p ?). Já nas restrições relativas às técnicas não eficientes o seu lado esquerdo tem um valor menor do que o direito, o que indica que tais restrições não têm influência sobre a solução (pois a produtividade marginal obtida a partir das técnicas a elas relacionadas é nula). Isto pode ser ilustrado a partir da solução do modelo, considerando a aplicação de 8 unidades de tempo de trabalho diretamente aplicado (trabalho “vivo”) por meio de cada técnica.

Tabela 2: Valor agregado gerado pela aplicação direta de 8 unidades de tempo de trabalho

	a1	a2	b1	b2	k
Produção	4	1	0,8	0,4	8
Valor da produção	112	28	20	10	40
Meio de produção	32	4	2,4	0,4	
V. meio de produção	160	20	12	2	
Renda					32
Valor agregado	-48	8	8	8	8

Fonte: elaborado pelo autor

Observa-se na tabela 3, que a atividade (*a1*) gera uma agregação de valor inferior ao tempo de trabalho diretamente aplicado, o que indica que ela é realizada por meio de uma técnica não eficiente. É interessante observar, também, que a atividade (*b1*), que aparentemente se encontrava fora da base ótima, gera uma agregação de valor equivalente ao tempo de trabalho diretamente aplicado, o que indica que, matematicamente ela é eficiente. Na prática, porém, esta atividade não poderia empregada (isto é fornecer uma quantidade não nula de produto), pois a solução seria inviável devido a alta escassez do recurso natural.

A tabela 4 mostra os valores agregados que seriam obtidos a partir dos valores-trabalho mostrados na tabela 2. Observa-se nesta tabela que os valores agregados que seriam obtidos pelas técnicas 1 seriam muito superiores ao tempo de trabalho diretamente aplicado. Isto implica se os agentes econômicos pudessem basear a escolha de técnicas no valor-trabalho as técnicas 1 seriam selecionadas. Como o emprego destas técnicas exigem mais meio de produção e, portanto, recurso natural, a produção seria insuficiente para satisfazer a demanda devido a escassez de recurso

natural. Estes resultados, mostram claramente a natureza distinta dos valores-trabalho em relação aos valores duais fornecidos pelo modelo completo.

Tabela 3: Valores agregados obtidos a partir dos valores-trabalho por meio da aplicação de 8 unidades de tempo de trabalho

	a1*	a2	b1*	b2	k
Produção	4	1	0,8	0,4	8
Valor da produção	48	12	16,8	8,4	8
Meio de produção	32	4	2,4	0,4	
V. meio de produção	32	4	2,4	0,4	
Renda					0
Valor agregado	16	8	14,4	8	8

\* considerando o valor-trabalho obtido com as técnicas 2

Fonte: elaborado pelo autor

Os resultados discutidos nos parágrafos anteriores deixam pouca margem a dúvida de que a solução dual do modelo fornece preços e não valores-trabalho. Isto porque o que difere preços de valores-trabalho é o fato de que os primeiros incluem rendas (ou seja, transferências de valores-trabalho), enquanto que os segundos expressam apenas o tempo de trabalho, direto e indireto, aplicado na produção. Esta renda diferencial, que se incorpora aos preços que permitem que eles possam indicar aos agentes econômicos as técnicas cujo emprego torna a satisfação da demanda compatível os recursos disponíveis, o que não pode ser realizado a partir dos valores-trabalho.

É possível que uma das causas da confusão dos preços como produtos marginais com valores-trabalho decorra do fato de Marx, no livro terceiro d'O Capital (MARX, 2017, p. 189) ter considerado que a equalização das taxas de lucro é a forma típica de formação dos preços no capitalismo. Porém, já no livro primeiro d'O Capital, ao analisar as formas do valor, Marx afirma explicitamente que a forma dinheiro de uma mercadoria (ou seja, a expressão monetária do seu valor) corresponde ao seu preço (MARX, 1987, 79). Negligenciando este processo básico da formação dos preços, grande parte dos marxistas consideram que estes são originados exclusivamente a partir da equalização da taxa de lucro, convergindo, assim, com a interpretação neoricardina deste processo. Esta consideração, no entanto, é inconsistente na medida em que, nos processos econômicos reais, as taxas de lucro só podem ser calculadas a partir de preços e não de valores, o que implica na existência de um processo de formação de preços anterior a equalização das taxas de lucro. No livro primeiro d'O Capital Marx considera que este processo corresponde a expressão monetária do valor médio (MARX, 1987, 78). É possível que esta consideração de Marx esteja na origem da negligência observada entre marxistas e neoricardianos geral em relação ao



papel desempenhado pelas rendas geradas pela escassez de recursos naturais na formação dos preços. Os resultados apresentados nesta nota de pesquisa mostram que os preços correspondem à valores marginais, e não médios, o que implica que as rendas geradas pela escassez de recursos naturais não podem ser negligenciadas na formação dos preços em geral, independentemente da influência exercida sobre os preços pelo processo de equalização das taxas de lucro. Esses resultados corroboram os obtidos por Silva Neto (2018, 2020).

Hoffmann; Cunha (2001), ao empregar o modelo de Morishima para analisar a formação da renda da terra reconhecem que os resultados fornecidos pelo problema dual, efetivamente, não correspondem a valores-trabalho, corroborando os resultados apresentados nesta nota de pesquisa. Os autores, porém, denominam os resultados fornecidos pelo modelo de “valores-sombra” ou ainda “valores hipotéticos”, o que nos parece que, de um ponto de vista econômico, não expressa claramente a sua natureza (que não pode ser outra senão monetária).

Enfim, é interessante salientar que os resultados apresentados nesta nota de pesquisa são coerentes com os de autores que consideram que a validação de uma teoria marxista da formação de preços não depende da solução do que ficou conhecido como o problema da transformação de valores em preços, segundo o qual a equalização das taxas de lucro deve ser compatível com igualdade entre o total dos valores-trabalho e dos valores monetários, assim como entre o total da mais-valia e dos lucros (COCKSHOTT, 2011; FARJOUN; MARCHOVER, 1983, MARCHOVER, 2011). Esta posição tem sido fortemente corroborada por estudos empíricos, os quais, de acordo com a teoria marxista, detectam uma forte correlação inversa entre os preços dos produtos e o tempo de trabalho empregado na sua fabricação, mas, ao contrário dos pressupostos do problema da transformação, evidenciam distribuições estocásticas das taxas de lucro que não indicam qualquer tendência das mesmas à equalização (FARJOUN; MARCHOVER, 1983, MARCHOVER, 2011, ZACHARIA, 2006).

## **Conclusão**

Os resultados apresentados nesta nota de pesquisa permitem concluir que a solução de modelos de programação linear que minimizam o tempo de trabalho que consideram técnicas alternativas e a possibilidade de escassez de recurso naturais não fornecem valores-trabalho.

## **Referências**

FARJOUN, E.; MARCHOVER, M. **Laws of chaos: a probabilistic approach to political economy**. London: Verso Editions, 1983.

HOFFMANN, R.; CUNHA, M. S. da, Valores-Trabalho e Preços de Produção em Sistemas Econômicos Sraffianos com Terra Homogênea. **RBE**, 55(1): 53-76, 2001.

MARCHOVER, M. The stochastic concept of economic equilibrium: a radical alternative. In: DEVIDI, D.; ANDHALLETT, M.; CLARKE, P, (eds.) **Logic, mathematics, philosophy, vintage enthusiasms**: essays in honour of John L. Bell. The Western Ontario series in philosophy of science. Dordrecht: Springer, (75), 2011, p. 413-421.

MARX, K. **O Capital**. Crítica da economia política. Livro Primeiro, volume I. São Paulo: Editora Bertrand Brasil – DIFEL, 1987.

MARX, K. **O Capital**. Crítica da economia política. Livro III. São Paulo: Boitempo, 2017.

MORISHIMA, M. **Marx's Economics**. A Dual Theory of Value and Growth. Cambridge: University Press, 1973.

SILVA NETO, B. A promoção do desenvolvimento sustentável e a teoria marxista dos preços. A importância das rendas diferenciais na teoria dos preços de Marx. **Desenvolvimento em Questão**, ano 16, número 44, p. 9-41, 2018.

SILVA NETO, B. **Com Marx, para além de Marx**: ensaios sobre riquezas, valores e preços. Curitiba: CRV, p.45-123, 2020.

ZACHARIAH, D. "Labour value and equalization of profit rates: a multi-country study." **Indian Development Review**, (4), june 2006.